



图像处理与识别—— Part 2 图像变换

主讲：张磊



- ▶ Why transformation ?
- 直接对图像的像素进行处理，相当于在空间域进行操作。在通常情况下，通过将图像变换后，在变换域内执行图像表达和处理任务，然后在反变换到空间域，效果会更好。
- 比如，把图像从空域变换到频域，有利于提取图像的特征，而且正交变换具有能量集中的作用，可实现图像的高效压缩，在频域内可以减少计算量，可以更好地分析和处理图像。
- 从图像信息的表达形式，大多数信号变换方法都适用于图像变换。



图像变换

- ▶ 几何变换
- ▶ 离散傅里叶变换
- ▶ 离散余弦变换
- ▶ 离散沃尔什-哈达玛变换
- ▶ K-L变换



几何变换

► 本质

通过改变图像像素的空间位置(坐标的空间变换), 并计算或估计新空间位置上的像素值(灰度插值)。两个基本操作。

► 基本方法

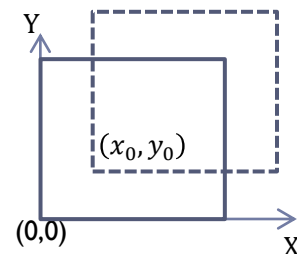
平移、尺度缩放、旋转、仿射变换、透视变换、插值。

► 平移(translation)

设像素点 (x, y) 平移到 $(x + x_0, y + y_0)$, 则变换后的像素点 (u, v) 可表示为

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

平移量



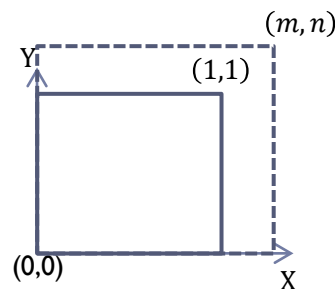


几何变换

► 尺度缩放(scaling)

设像素点 (x, y) 缩放 (m, n) 倍(尺度因子), 则变换函数为

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

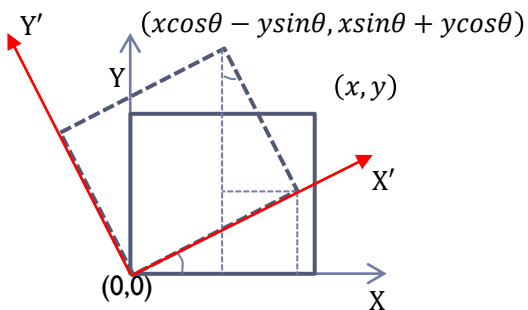


► 旋转(rotation)

将图像绕坐标系的原点逆时针旋转角度 θ , 则变换函数为

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

新坐标轴发生变化, 但每个点相对坐标轴的位置没有变化





几何变换

▶ 仿射变换(affine transform)[Wolberg 1990]

仿射变换是由一个线性变换和一个平移组成。在有限维的情况下，仿射变换由一个矩阵(线性变换)和一个向量(平移)组成(自由度为6)。一般表达式

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

也可以表达成

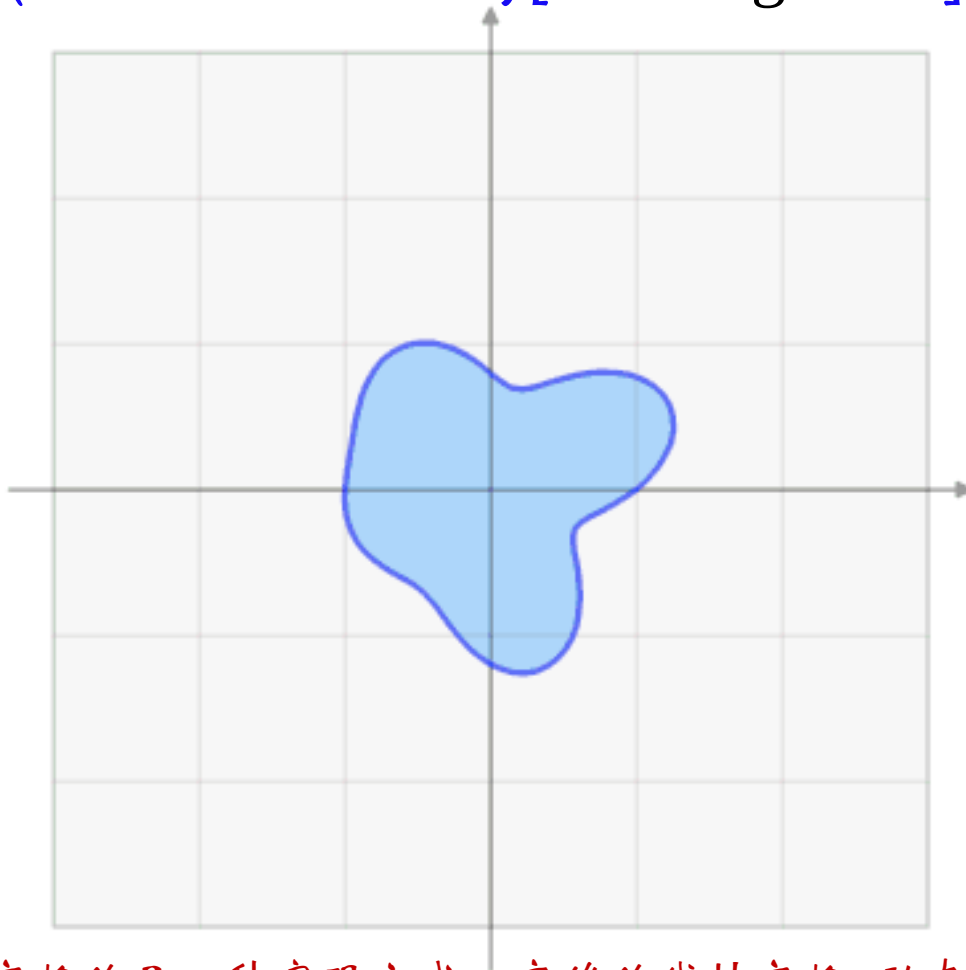
$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

几何意义：仿射变换可以通过高维度的线性变换(立体)来实现。



几何变换

- ▶ 仿射变换 (affine transform) [Wolberg 1990]



仿射变换的另一种实现方式：高维的线性变换 动态示意图



几何变换

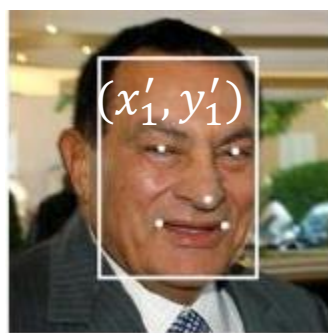
▶ 仿射变换(affine transform)[Wolberg 1990]

仿射变换是平移、尺度、旋转的复合变换，三种几何变换也是仿射变换的特殊情况。

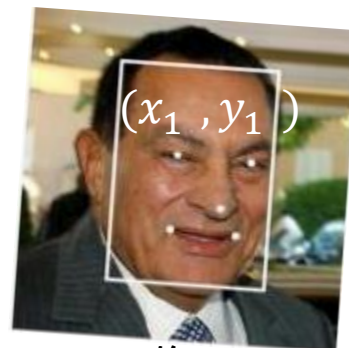
比如，对一个向量先平移、再尺度、再旋转，也是仿射变换

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right)$$

应用举例：



模板



输入



输出



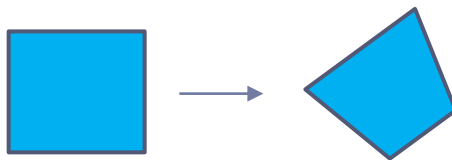
几何变换

► 透视变换(perspective transform)

透视变换是将一幅图像从一个视平面变换到另一视平面，这是与仿射变换的本质区别。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\text{缩放}}{a_2} & \overset{\text{旋转}}{a_1} & \overset{\text{平移}}{a_0} \\ b_2 & b_1 & b_0 \\ c_2 & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

透视 尺度



几何变换

如何使用坐标变换实现图像的几何变换？
如何获取图像的像素值？





像素值估计

► 前向映射

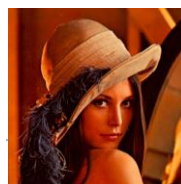
通过扫描输入图像的像素，并在每个位置 (x,y) 通过仿射变换直接计算输出图像中相应位置 (u,v) 上的像素。

该方法的问题：输入图像的多个像素可能对应输出图像的同一位置，以及某个输出位置可能没有对应的输入像素值。

► 后向映射

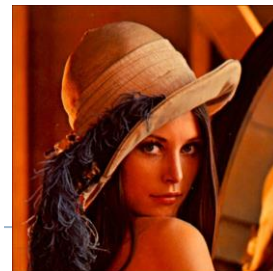
通过扫描输出图像的像素，并在每个位置 (u,v) 上，利用反变换计算输入图像中的相应位置 (x,y) ，然后利用插值计算该位置 (x,y) 上的输入像素，从而决定输出位置 (u,v) 上的灰度值。

后向映射方法更为有效，在大多数应用中被采纳。



前向映射

后向映射





几何变换

► 灰度插值

图像插值是利用原图像的近邻像素点的值，来生成未知像素点的值，从而获得更高分辨率的图像，而不增加图像信息(兑了白糖的水)。

比如图像放大(像素数量增多)时，就是通过插值产生了更多的像素值。



几何变换

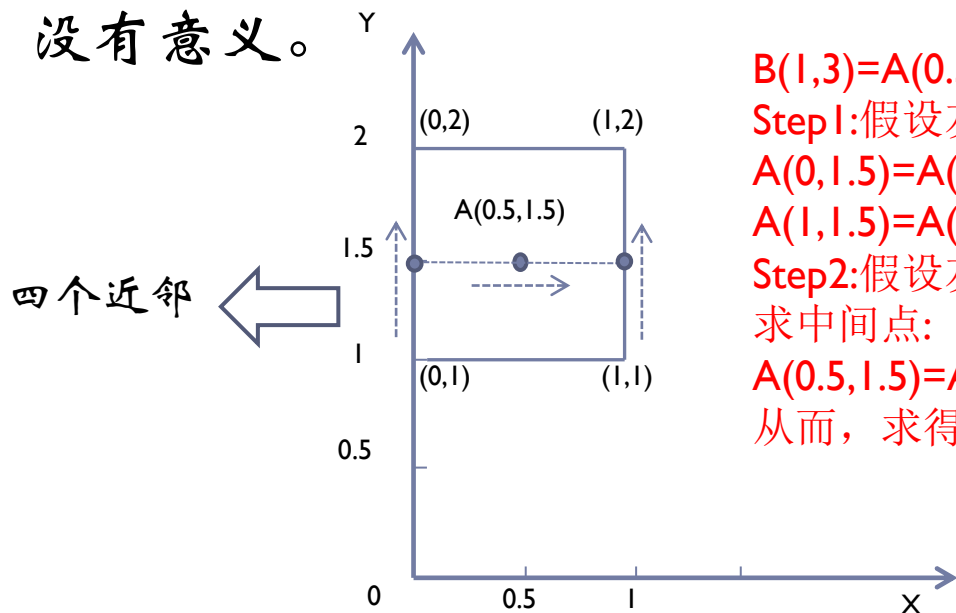
- ▶ 方法
- 最近邻插值(零阶插值)法：将某未知像素点赋予其最近邻的像素点的灰度值，该方法简单，快速，但效果不好。
- 双线性插值法(一阶插值, bilinear interpolate):
- ▶ 该方法具有平滑功能，但会使图像细节(高频部分)产生退化，变模糊



几何变换

► 双线性插值举例

举例：对于一幅 64×64 的图像A，将其放大到 128×128 的图像B。那么，利用**后向映射**，有 $B(x, y) = A(\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$ 。B中对于2的整数倍的x和y坐标处的灰度值，可以根据A获得。但对于其他位置，比如(1,3)， $B(1,3) = A(0.5, 1.5)$ 。在图像中，小数坐标没有意义。



$B(1,3) = A(0.5, 1.5)$, 只需求 $A(0.5, 1.5)$

Step1: 假设灰度级纵向方向是线性变化的，求两点：

$$A(0, 1.5) = A(0, 1) + 0.5 * (A(0, 2) - A(0, 1))$$

$$A(1, 1.5) = A(1, 1) + 0.5 * (A(1, 2) - A(1, 1))$$

Step2: 假设灰度级水平方向也是线性变化的，根据两点，求中间点：

$$A(0.5, 1.5) = A(0, 1.5) + 0.5 * (A(1, 1.5) - A(0, 1.5))$$

从而，求得 $B(1,3)$



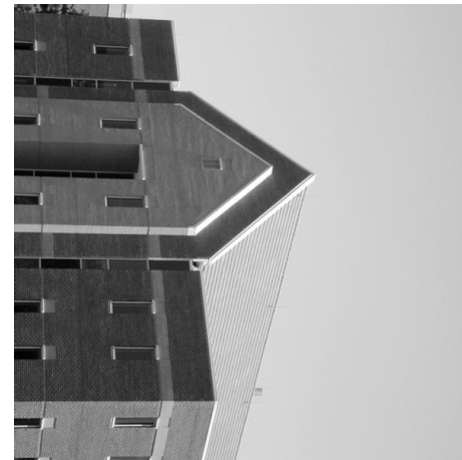
► 近邻插值旋转



原始图



顺时针旋转 45°



顺时针旋转 90°

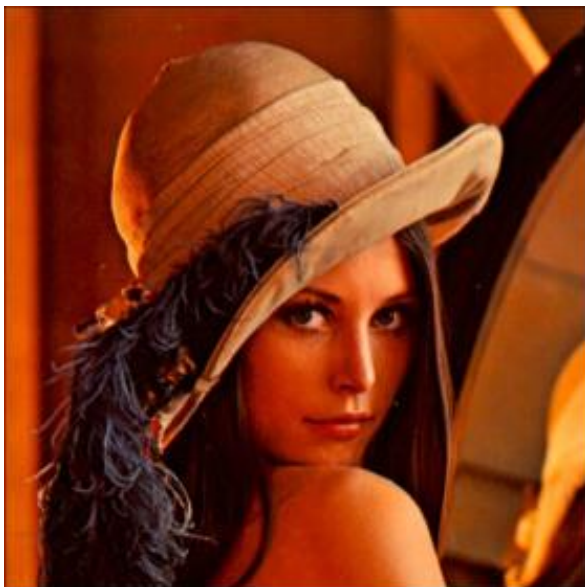


► 双线性插值示例

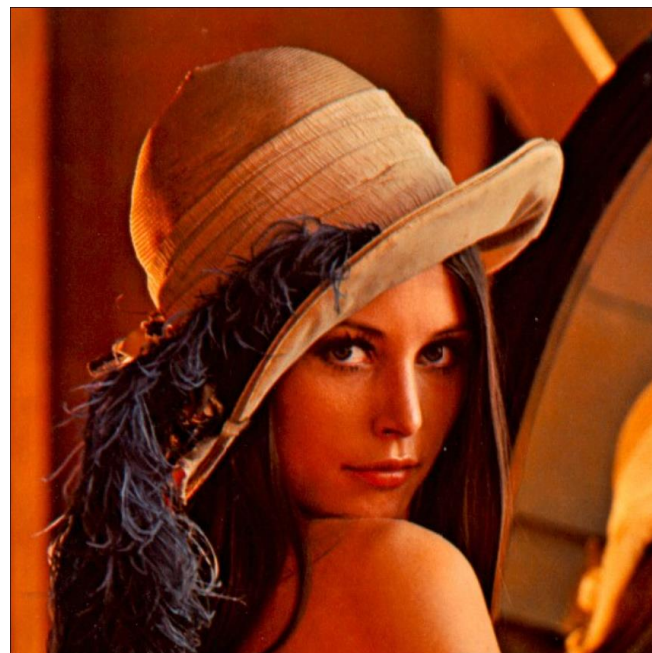
对于彩色图像，需要对R，G，B三个分量分别进行处理，然后再合并。



原始图



尺度为3倍



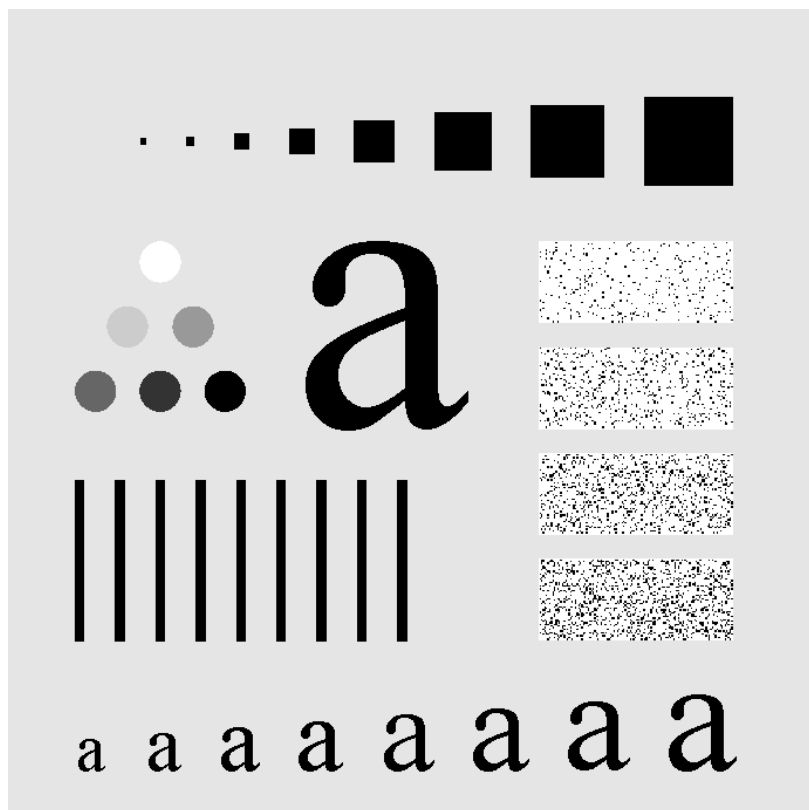
尺度为5倍



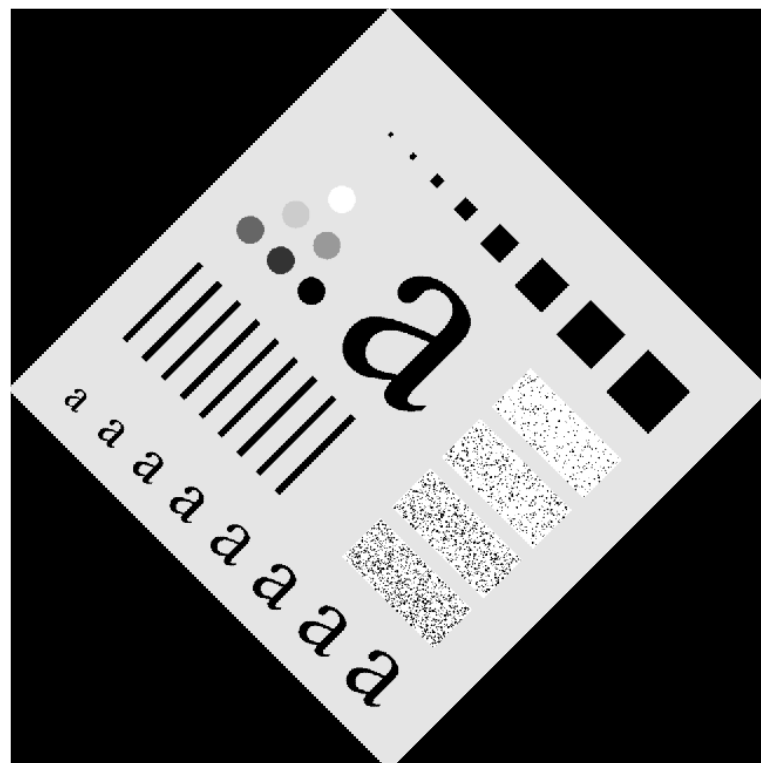
图像配准

- ▶ 图像配准是数字图像处理的一种重要应用，用于图像的对齐，是图像识别、分类等应用中较为重要的一步。

问题：假设给定两幅图像(输入和参考)，而输入图像到参考图像的变换是未知的，如何对输入图像进行配准？(实际上是估计这种变换，利用变换函数进行配准)？



参考图



几何畸变图(输入)



图像配准

◆ 方法：

- ▶ 约束点或控制点选择：这些点是在输入图像 $f(u,v)$ 和参考图像 $f(x,y)$ 中其位置已知的对应点。
- ▶ 建模：假设在输入图像和参考图像中有一组4个控制点，双线性近似模型可写为

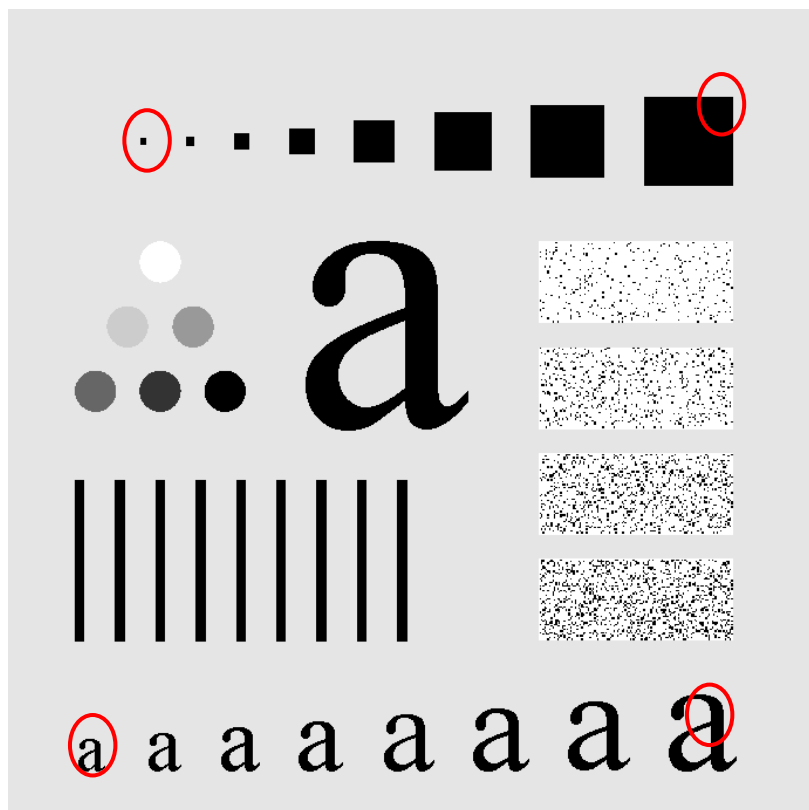
$$\begin{cases} x = c_1u + c_2v + c_3uv + c_4 \\ y = d_1u + d_2v + d_3uv + d_4 \end{cases}$$

其中， (x,y) 和 (u,v) 为参考图像和输入图像的控制点像素坐标。

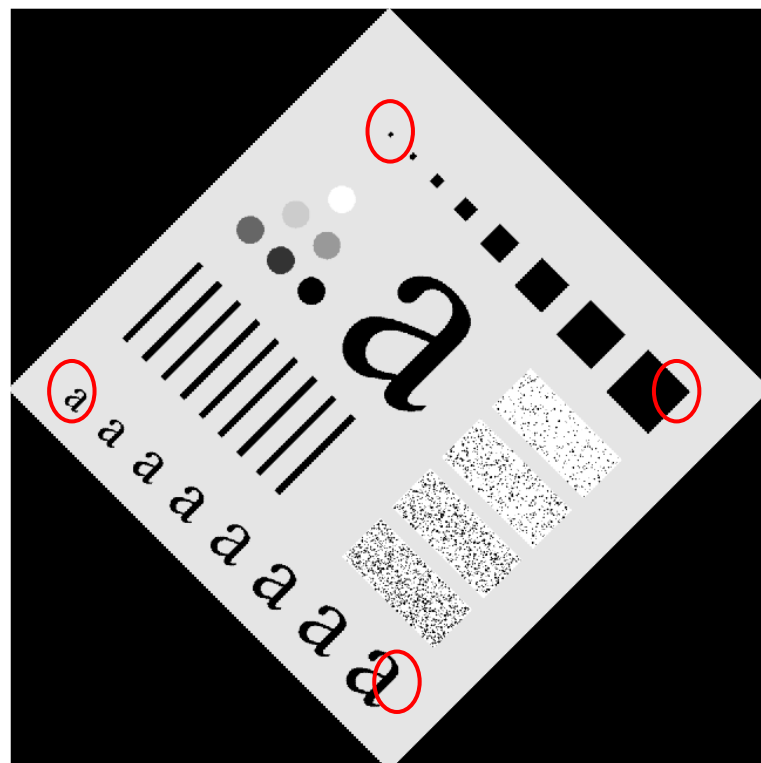
若参考图和输入图中有4个已知控制点，将坐标代入上边方程组中，可以得到8个方程。

从而，可以计算出8个变换系数 $c_1 \sim c_4$ 和 $d_1 \sim d_4$ 。模型的变换系数将被用于图像的像素(位置坐标)配准。

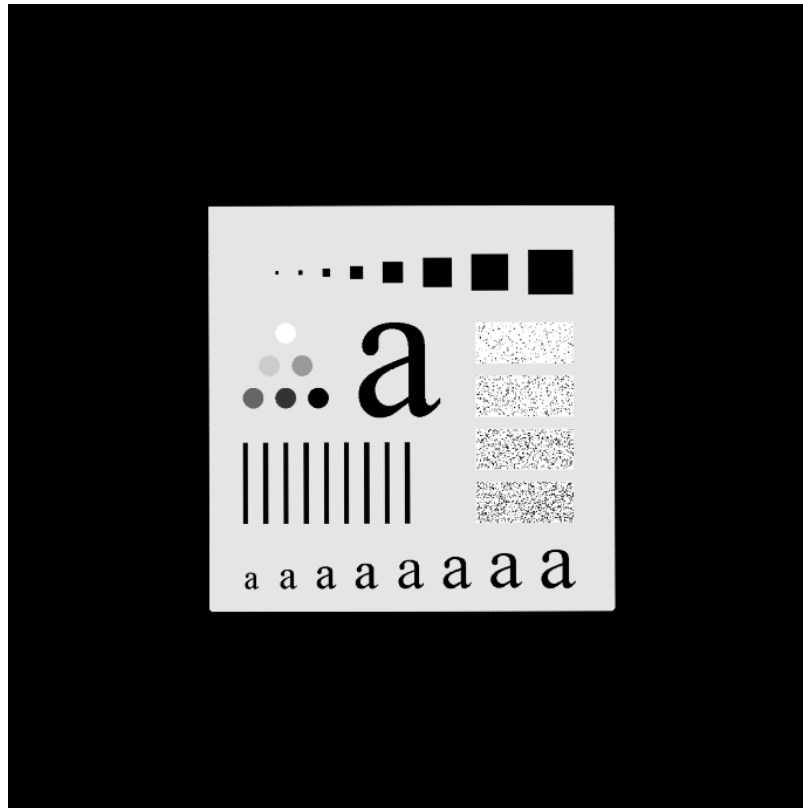
另：上面的模型只是对图像的像素(位置坐标)进行了配准，但像素值依然需要利用灰度插值的方法进行计算。



参考图



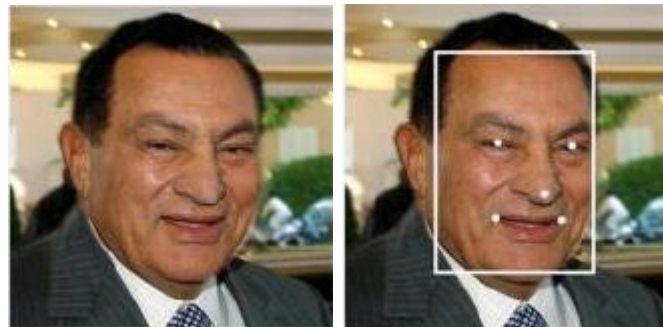
几何畸变图(输入)





图像配准

- ▶ 需要强调的是，在实际中，4个约束点可能无法实现较好的配准，通常可以选择多个点。
- ▶ 或者，对图像进行分块，对多个图像块（子图像）分别进行配准，重复多次。每个图像块中选择4个约束点。
- ▶ 控制点的数量和模型的复杂度取决于图像的几何畸变程度。
- ▶ 在实际应用中，可以建立不同的配准模型，通过参数的学习，找出最优模型。



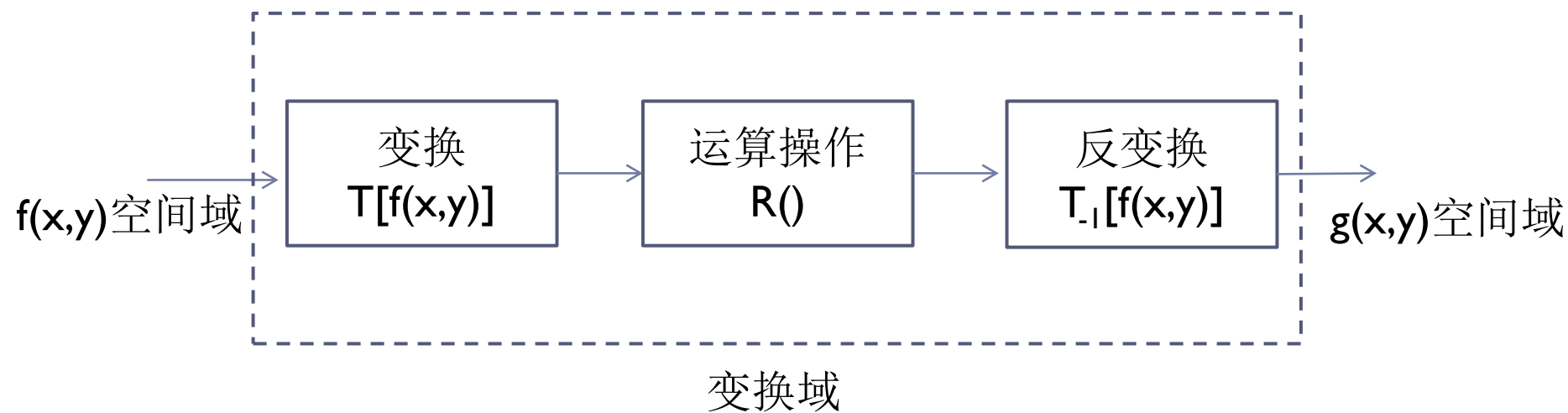
小结

- ▶ 几何变换
 - 平移、尺度缩放、旋转、仿射变换、透视变换
- ▶ 灰度插值
 - 近邻插值和双线性插值
- ▶ 前向映射和后向映射
- ▶ 图像配准
 - 控制点或约束点法



变换域

- 刚讨论的图像几何变换方法都是作用在像素域或空间域，在某些情况下，可以将图像从空间域经过变换后，在变换域(频域)执行图像处理操作，然后再利用反变换(逆变换)，返回到空间域会更好。





变换域

- 在图像处理中，所谓的变换是指二维变换。通常的二维正变换表达式为

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) r(x, y, u, v)$$

其中， $r(x, y, u, v)$ 为**正变换核**， (u, v) 为变换变量。

在给定 $T(u, v)$ 后，还可以通过反变换获得 $f(x, y)$ ，二维反变换表达式为

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u, v) s(x, y, u, v)$$

其中， $s(x, y, u, v)$ 为**反变换核**。



变换域

► 意义

- 利用频率成分和图像之间的对应关系，一些在空间域表达困难的增强任务，在频域中变得普通。
- 图像的正交变换过程类似于去相关，在空间域交叉且难以描述的特征，在频域中往往更为**直观**、**分离**甚至**集中**。
- 图像滤波在频域更为直观，可以解释空间域滤波难以解释的性质。
- 频域滤波，可以通过信号**重构**，返回到空间域。



变换域

- ▶ 基础理论
- ▶ 线性系统
- ▶ 卷积（连续和离散一维卷积、连续和离散二维卷积）
- ▶ 正交变换
- ▶ 酉变换



线性系统

▶ 线性系统 定义

对于某特定系统，有

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) \text{ 和 } x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

当且仅当 $x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$ ，该系统是线性的。并且有 $ax_1(t) \rightarrow ay_1(t)$ ；(线性是指齐次性和叠加性)

▶ 线性系统移不变 定义：

对于某线性系统，有 $x(t) \rightarrow y(t)$ ，当输入信号沿时间轴平移 T ，有

$$x(t - T) \rightarrow y(t - T)$$

那么该线性系统具有移不变性。



卷积

► 一维卷积（连续函数）

对于一个线性系统的输入 $f(t)$ 和输出 $y(t)$, 两者存在某种关系:

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$h(t)$ 是当线性系统输入为单位脉冲函数时, 所产生的激励输出(线性系统的输出响应), 即单位冲激响应函数。

脉冲(冲激)函数: δ 函数。

$$\delta(t) = 0, t \neq 0, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

某个函数与单位冲激函数的卷积, 得到一个在该冲激处的函数拷贝!

► 一维离散卷积

$$y(u) = f(u) * h(u) = \sum_{\tau} f(\tau)h(u - \tau)$$

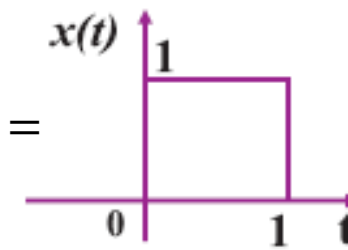
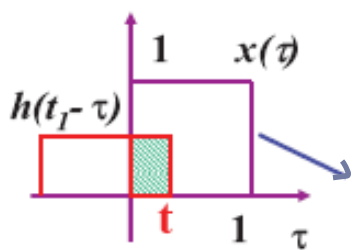
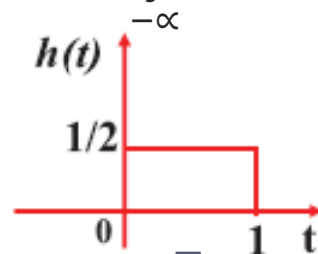
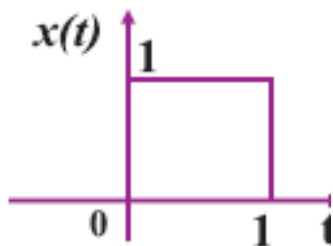


卷积

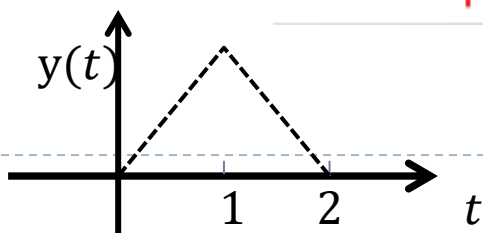
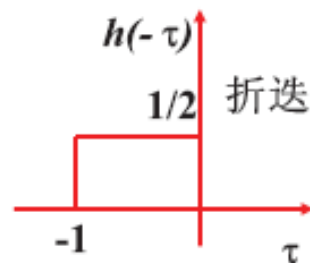
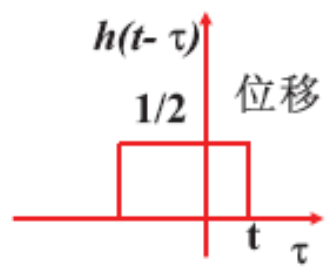
卷积的积分表示

给定信号 $x(t)$ 和函数 $h(t)$,如图所示:

$$\text{定义: } y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$



$\times$



如果函数 $h(t)$ 与 $x(t)$ 宽度不相等呢?



卷积

► 二维卷积（连续函数）

$$\begin{aligned} y(t_1, t_2) &= f(t_1, t_2) * h(t_1, t_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau_1, \tau_2) h(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

► 二维卷积（离散）

$$\begin{aligned} y(u, v) &= f(u, v) * h(u, v) \\ &= \sum_{\tau_1} \sum_{\tau_2} f(\tau_1, \tau_2) h(u - \tau_1, v - \tau_2) \end{aligned}$$



正交变换

▶ 连续函数集合的正交性

设正交函数集合 $U = \{u_0(t), u_1(t), \dots\}$, 则有

$$\int_{t_0}^{t_0+T} u_m(t)u_n(t)dt = \begin{cases} C, & \text{if } m = n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

当 $C=1$ 时, 则该正交函数集合为 **归一化**的正交函数集合。

多维空间坐标系的基轴方向互相正交。



正交变换

► 正交函数集合 U 的完备性

若 $f(x)$ 是定义在 t_0 和 $t_0 + T$ 区间的实值信号，平方可积。可以表示为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)$$

对任意小的 $\varepsilon > 0$ ，存在充分大的 N ，用 N 个有限展开式估计 $f(x)$ ，

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n u_n(x)$$

并有 $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(x) - \tilde{f}(x)|^2 dx < \varepsilon$,

那么称函数集合 U 是完备的。 (集合足够大)



正交变换

► 离散情况

对于n个正交向量集合 $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$.

$$\mathbf{a}_1 = [a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}]^T$$
$$\vdots$$

$$\mathbf{a}_n = [a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn}]^T$$

则有

$$\sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = \begin{cases} C, & \text{if } i = j \\ 0, & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} a_k^T a_k, & k = 1, \dots, n \\ a_k^T a_m, & k, m = 1, \dots, n, k \neq m \end{cases}$$

若 $C=1$, 则该集合为归一化的正交向量集合。

那么, 矩阵 A 是一个正交矩阵, 并满足 $AA^T = A^T A = I$



正交变换

一维正交变换

对于一维向量 x , 用正交实矩阵 A 进行运算

$$y = Ax$$

若要重构 x , 则

$$x = A^{-1}y = A^T y$$

这个过程可被称为**正交变换**。 $A^{-1} = A^T$.

当正交矩阵 A 为复数矩阵时, 正交的条件为

$$A^{-1} = A^{*T}$$

其中 A^* 为 A 的复数共轭矩阵。满足该条件的矩阵为**酉矩阵**。

对于任意向量 x 的运算

$$y = Ax$$

$$x = A^{-1}y = A^{*T}y$$

称为**酉变换 (unitary transform)**。 $A^{-1} = A^{*T}$

可见, **正交矩阵和正交变换为酉矩阵和酉变换的特例**。

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-\frac{j2\pi ux}{N}}, u = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{00} & \cdots & w_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{N0} & \cdots & w_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix}$$

$$F = Wf$$

一维离散傅里叶变换
可以写成酉变换形式



正交变换

▶ 正交（或酉）矩阵的定义

- ▶ **定义1:** 若 N 阶实数矩阵 A 满足 $AA^T = A^T A = I$, 则 A 为正交矩阵;
- ▶ **定义2:** 若 N 阶复数矩阵 A 满足 $AA^{*T} = A^{*T} A = I$, 则 A 为酉矩阵;

▶ 正交矩阵（酉矩阵）的性质

- ▶ **性质1:** 若 A 为正交矩阵, 则 $A^{-1} = A^T$; 若 A 为酉矩阵, 则 $A^{-1} = A^{*T}$;
- ▶ **性质2:** 若 A 为正交（或酉矩阵）归一化矩阵, 则 A 中各行或各列向量的模为1, 任意不同行或不同列向量之间相互正交(内积为0);
- ▶ **性质3:** 若 A 为正交矩阵（或酉矩阵）, 则矩阵行列式为 ± 1 ;
- ▶ **性质4:** 若 A 和 B 均为正交矩阵（或酉矩阵）, 则 AB 也是正交（或酉）矩阵



二维酉变换

- ▶ $M \times N$ 二维函数可以用正交序列展开和恢复

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) a(x, y, u, v)$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u, v) a^*(x, y, u, v)$$

$a(x, y, u, v)$ 为正变换核, $a^*(x, y, u, v)$ 为反变换核。

- ▶ 变换核的可分离性

$$a(x, y, u, v) = a(u, x) b(v, y)$$

$a(u, x)$ 和 $b(v, y)$ 为一维完备正交基的集合, 用矩阵表示为 A 和 B 。 $A = \{a(u, x)\}$, $B = \{b(v, y)\}$



二维酉变换

那么，二维酉变换可表示为

$$\begin{aligned} T(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) a(x, y, u, v) \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} a(u, x) f(x, y) b(v, y) \end{aligned}$$

用矩阵表示

如果 $B=A$ ，有

反变换可以写为

$$\mathbf{T} = \mathbf{A} \mathbf{f} \mathbf{B}^T$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{A} \mathbf{f} \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^* \mathbf{T} \mathbf{A}^{*T}$$

二维离散傅里叶变换
可以写成二维酉变换
形式



二维酉变换

► 例：给定正交矩阵A和图像U， $\rightarrow$ 二维

$$\text{其中, } A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

求：图像U经正交A变换后的变换图像V.

分析：利用二维酉变换

$$V = AUA^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



酉变换

▶ 性质

- ▶ 酉矩阵是正交阵， $\mathbf{A}\mathbf{A}^{*T} = \mathbf{A}^{*T}\mathbf{A} = \mathbf{I}$
- ▶ 酉变换具有能量保持的特点。对于 $\mathbf{T} = \mathbf{A}f$ ，有 $\|\mathbf{T}\| = \|f\|$
- ▶ 酉变换具有能量紧缩的特点。即信号能量集中到少数的变换系数中，由于能量保持（能量守恒），许多变换系数包含很少的能量。（主成分分析）
- ▶ 酉变换具有去相关的特点。当输入向量元素间高度相关时，变换系数趋于去相关。
- ▶ 变换前后的均值和协方差： $\mu_{\mathbf{T}} = E(\mathbf{A}f) = \mathbf{A}E(f) = \mathbf{A}\mu_f$;
 $\Sigma_{\mathbf{T}} = E\{(\mathbf{T} - \mu_{\mathbf{T}})(\mathbf{T} - \mu_{\mathbf{T}})^T\} = E\{(\mathbf{A}f - \mathbf{A}\mu_f)(\mathbf{A}f - \mathbf{A}\mu_f)^T\} = \mathbf{A}E\{(f - \mu_f)(f - \mu_f)^T\}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\Sigma_f\mathbf{A}^T$



酉变换

▶ 性质

- ▶ 若 A 为酉矩阵，其行列式的模 $|\det(A)| = 1$ 。
- ▶ 若 a 为向量，则作酉变换后 $b=Aa$ ，向量模保持不变，即 $|b| = |a|$ (保长变换)。

▶ 可进行图像变换或分析的基本条件

- ▶ 满足正交、完备两个条件的函数集合或矩阵
- ▶ 常用的几种变换：傅里叶变换、K-L变换、沃尔什变换、哈达玛变换、Haar变换，都满足正交性和完备性两个条件。



离散图像的正交变换

- ▶ 离散图像的正交变换是图像信号在二维离散完备正交基上的展开，这种正交基具有**能量保持**、**能量集中**、**去相关**等特性，在图像处理中具有重要作用。
- ▶ 离散图像 $f(m,n)$ 在离散完备正交基 $\{a(u,v;m,n)\}$ 上的展开系数为 $g(u,v)$ 为

$$g(u, v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) a(u, v; m, n)$$
$$f(m, n) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} g(u, v) a^*(u, v; m, n)$$



小结

- ▶ 变换域基础
- 线性系统及其移不变性
- 卷积
- 连续函数集合正交与完备性
- 一维正交变换
- 二维酉变换



傅里叶变换

- ▶ 一维连续傅里叶变换及逆变换
- ▶ 一维离散傅里叶变换及逆变换
- ▶ 二维连续傅里叶变换及逆变换
- ▶ 二维离散傅里叶变换及逆变换

特点：形式相似，在图像处理中二维离散变换有重要应用。

傅里叶变换域也称为频域。



傅里叶变换

► 一维连续傅里叶变换及逆变换

设 $f(x)$ 为连续可积的函数，其傅里叶变换定义

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

通常 $F(u)$ 为复数，表示为 $F(u) = R(u) + jI(u)$

$R(u)$ 和 $I(u)$ 分别为实部和虚部。

另，写成指数形式 $F(u) = |F(u)|e^{j\phi(u)}$ ， $|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$ 表示幅度谱， $\phi(u) = \arctan\left(\frac{I(u)}{R(u)}\right)$ 表示相位谱。

其反变换为

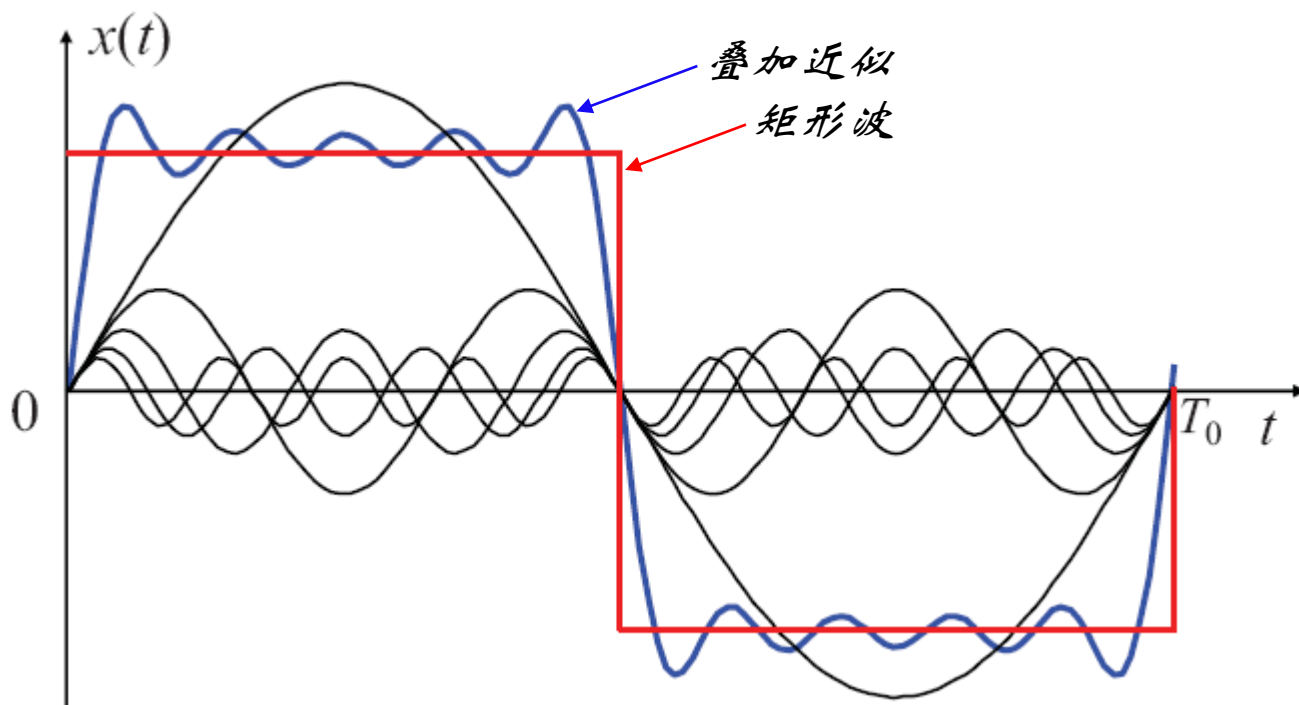
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

直观理解为
多个不同频率
正弦信号的
叠加



傅里叶变换

► 一维连续傅里叶变换及逆变换



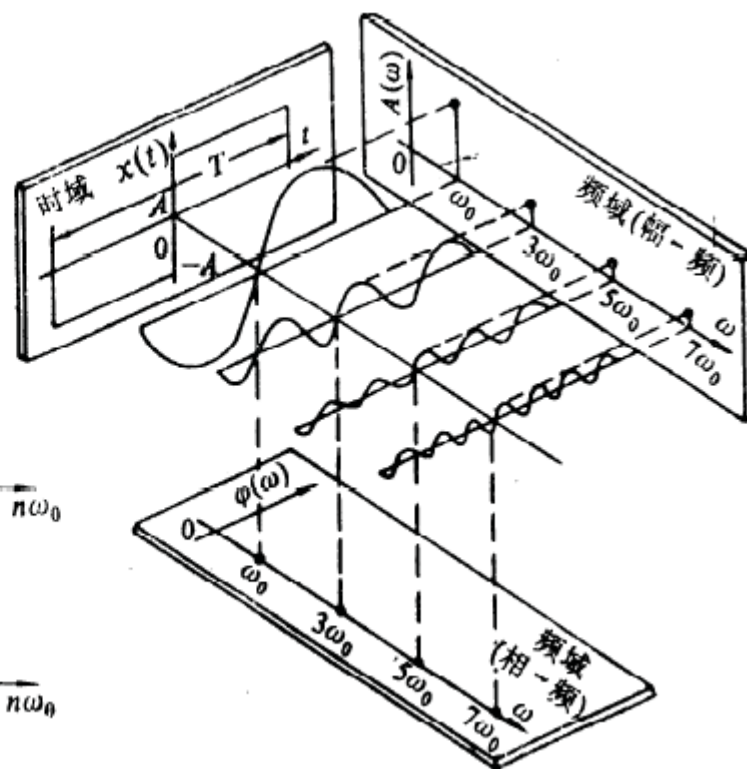
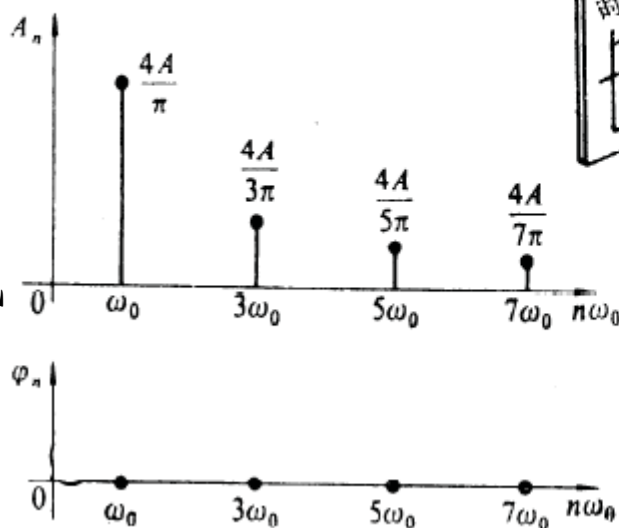


傅里叶变换

► 一维连续傅里叶变换及逆变换

方波信号的时、频描述

方波的频域形式



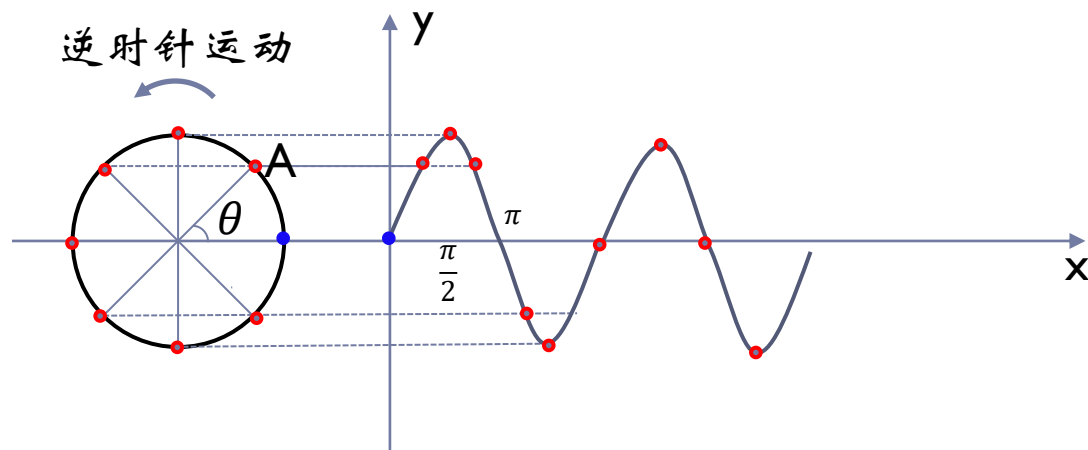
对于其他波形或信号的时、频描述如上所示



傅里叶变换

► 一维连续傅里叶变换及逆变换

如何理解相位: $y = A \sin(\omega x + \varphi)$



当运动到A点(x,y)时, $\sin \theta = \frac{y}{R}$, $\cos \theta = \frac{x}{R}$, R为半径, 单位圆R=1



傅里叶变换

► 一维离散傅里叶变换及逆变换

正变换表达式

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-\frac{j2\pi ux}{N}}, u = 0, 1, \dots, N-1$$

逆变换表达式

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{\frac{j2\pi ux}{N}}, x = 0, 1, \dots, N-1$$



傅里叶变换

► 二维连续傅里叶变换及逆变换

由一维傅里叶变换推广得到。

正变换表达式

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

另, $F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v)$, 还可以表示为 $F(u, v) = |F(u, v)|e^{j\phi(u, v)}$, 幅度谱 $|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$, 相位谱 $\phi(u, v) = \arctan \frac{I(u, v)}{R(u, v)}$

$R^2(u, v) + I^2(u, v)$ 称为功率谱

逆变换表达式

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$



傅里叶变换

► 二维离散傅里叶变换及逆变换

离散傅里叶变换(DFT)建立了离散空域和离散频域之间的关系，利用计算机对变换后的信号进行频域处理，比在空域中更方便。另外，DFT有快速的FFT算法，计算效率提高。

二维离散傅里叶变换形式

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

逆变换形式

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$



傅里叶变换

二维离散傅里叶变换的性质

线性系统

多个函数和的傅里叶变换等于各个函数傅里叶变换的和。

$$af(x, y) + bg(x, y) \leftrightarrow aF(u, v) + bG(u, v)$$

可分离性

二维DFT可通过两次一维DFT完成。对行、列分别进行变换。注：FFT只有一维方法

$$F(u, v) = F_x\{F_y[f(x, y)]\} = F_y\{F_x[f(x, y)]\}$$

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi\frac{vy}{N}} \right\} e^{-j2\pi\frac{ux}{M}}$$

移位特性(空间位移)

函数的自变量位移的傅里叶变换产生一个复系数，等效于频谱函数的相位谱改变，而幅度谱不变。

$$f(x - x_0, y - y_0) \leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi\frac{(ux_0 + vy_0)}{N}}$$

(逆变换同样满足)



傅里叶变换

► 二维离散傅里叶变换的性质

► 移位特性(频率位移)

函数的**频率位移**的傅里叶变换等效于变换域的坐标原点平移，而幅度谱和相位谱均不变。

$$f(x, y)e^{j2\pi\frac{(u_0x+v_0y)}{N}} \leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

无论是空间移位还是频域移位，幅度保持不变。

► 比例特性

信号在时域中压缩，等效于在频域扩展(频带加宽)。反之亦然。

$$f(ax, by) \boxed{\leftrightarrow} \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$

► 周期性

$$f(x, y) = f(x + aN, y + bN) \leftrightarrow F(u, v) = F(u + aN, v + bN)$$

a, b 为整数。

► 共轭对称性

$$F^*(u, v) = F(-u, -v)$$

(逆变换同样满足)



傅里叶变换

► 二维离散傅里叶变换的性质

► 旋转不变性

设极坐标 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, u = w\cos\phi, v = w\sin\phi$, 那么, $f(x, y)$, $F(u, v)$ 可转化为 $f(r, \theta)$ 和 $F(w, \phi)$ 。

$$f(r, \theta) \leftrightarrow F(w, \phi)$$

则函数旋转 θ_0 度, 有

$$f(r, \theta + \theta_0) \leftrightarrow F(w, \phi + \theta_0)$$

► 卷积定理

空域中的卷积相当于频域中相乘

$$f(x, y) * g(x, y) \leftrightarrow F(u, v)G(u, v)$$

► 相关定理

空域中 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 的相关等价于频域中 $F^*(u, v)$ 与 $G(u, v)$ 相乘。

► 其他性质: 频谱中心化、平均值、实偶函数的DFT和实奇函数的DFT

$$(-1)^{x+y} f(x, y) \leftrightarrow F\left(u - \frac{N}{2}, v - \frac{N}{2}\right)$$

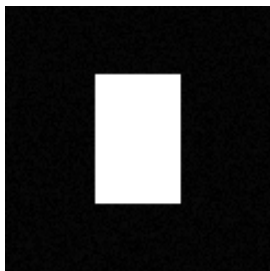
仅含余弦
项的实部

仅含正弦
项的虚部

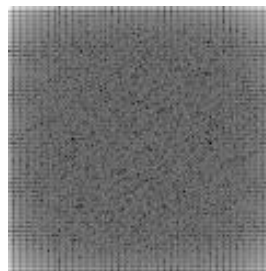


图像变换

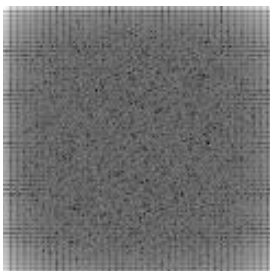
源图像



图像频谱



图像幅度谱



图像相位谱



图像频谱实部



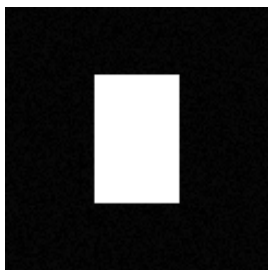
图像频谱虚部



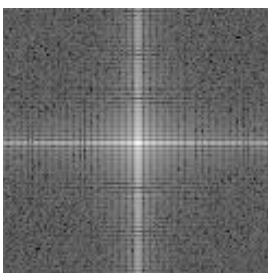


图像变换

源图像



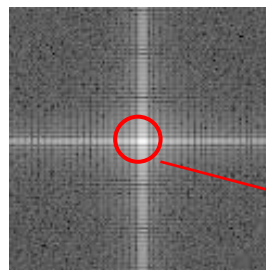
图像幅度谱



图像频谱实部

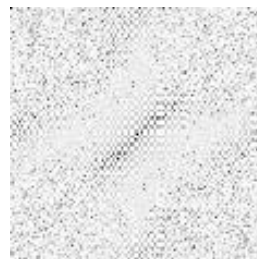


图像频谱



低频部分 (能量最大)

图像相位谱



图像频谱虚部





离散傅里叶变换

- ▶ 幅度与相位特性
- ✓ 图像信号的DFT包含幅度与相位两部分
- ✓ 幅度谱具有较明显的信号结构特征，易于解释
- ✓ 相位谱类似随机图案，难以解释
- ✓ 物体的空间移动，相当于频域的相位移动，因此相位谱同样重要。对于图像的复原，幅度和相位不可缺少。



- ▶ 图像方面的应用
 - 高、低通滤波
 - 噪声滤波(去噪)
 - 图像压缩、图像增强



离散余弦变换(DCT)

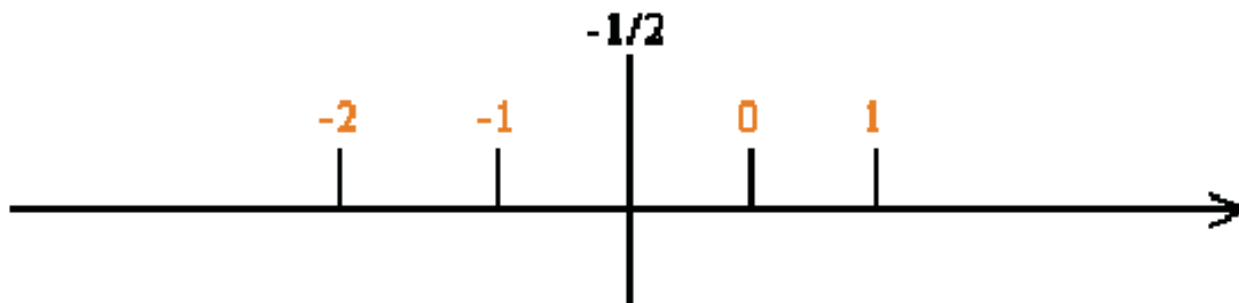
- ▶ 一维傅里叶变换，问题在于其变换后的参数为复数，从数据描述上是实数的两倍。因此，希望达到相同的变换效果，而数据量不增大。
- ▶ 余弦变换相当于傅里叶变换的简化形式。偶函数的傅里叶变换是一种余弦变换（保留了实部，而虚部为0）。
- ▶ 数字图像 $f(x,y)$ 一般不具有偶函数条件，但可以通过构造变成偶函数，形成的离散傅里叶变换即为离散余弦变换。
- ▶ 离散余弦变换相当于一个2倍长度的离散傅里叶变换，前提是对一个实偶函数进行（若对一个实奇函数进行，则是离散正弦变换）。



离散余弦变换

► 一维DCT

一个任意函数采样从 $0, 1, 2, \dots, N-1$, 若向负方向折叠形成 $2N$ 采样的偶函数, 就可以进行 $2N$ 的偶函数傅立叶变换。



此时可采用离散余弦变换进行。



离散余弦变换

► 一维DCT的定义，对函数 $f(x)$

$$F(u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N} \right]$$

其归一化表示为

$$F(u) = c(u) \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N} \right]$$

其中，

$$c(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & u = 0 \\ 1, & u = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (\text{实现正交归一化})$$

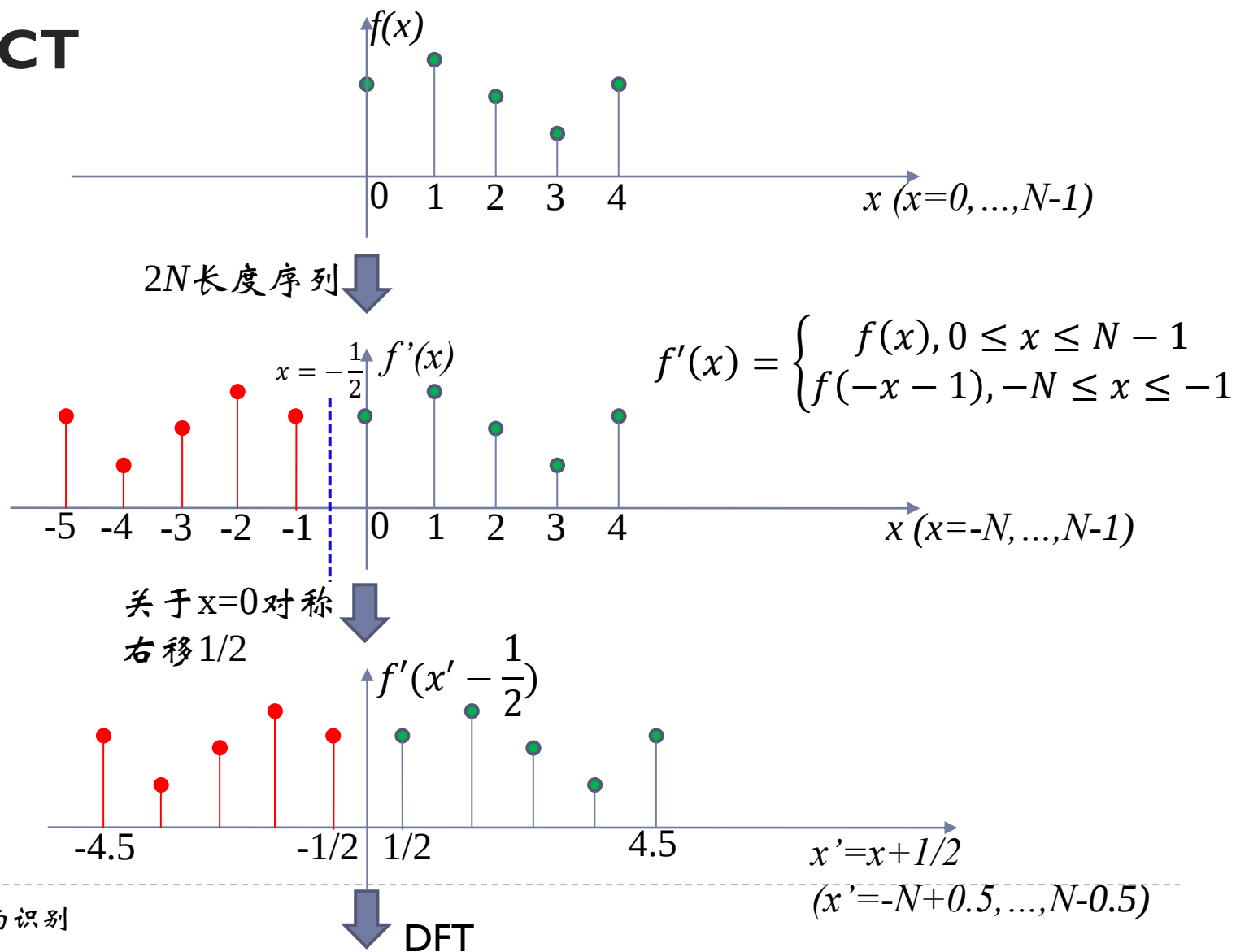
矩阵表达式形式

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}\mathbf{f}$$



离散余弦变换

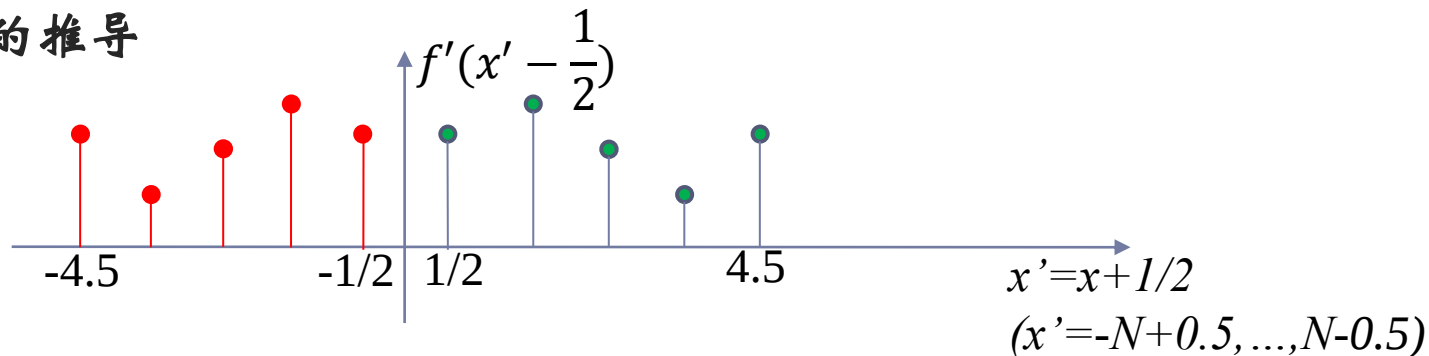
► 一维DCT





离散余弦变换

一维DCT的推导



$$\begin{aligned}
 F(u) &= \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{x'=-N+0.5}^{N-0.5} f'(x' - \frac{1}{2}) e^{-\frac{j2\pi ux'}{2N}} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{x'=-N+0.5}^{N-0.5} f'(x' - \frac{1}{2}) \cos\left(\frac{2\pi ux'}{2N}\right) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2N}} \sum_{x'=0.5}^{N-0.5} f'(x' - \frac{1}{2}) \cos\left(\frac{2\pi ux'}{2N}\right) = \frac{2}{\sqrt{2N}} \sum_{x=0}^{N-1} f'(x) \cos\left(\frac{2\pi u(x+\frac{1}{2})}{2N}\right) \quad (\text{令 } x = x' - \frac{1}{2}) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos\left(\frac{\pi u(2x+1)}{2N}\right)
 \end{aligned}$$

(注：对于正弦部分，正负半轴的正弦之和为0， $\sin(x) + \sin(-x) = 0$ ；对于余弦部分，正负半轴之和为2倍关系， $\cos(x) + \cos(-x) = 2\cos(x)$ 。)

所以，离散余弦变换相当于是一个2倍长度序列的离散傅里叶变换。



离散余弦变换

► 逆DCT

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{u=0}^{N-1} c(u) F(u) \cos \left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N} \right]$$

矩阵表达形式

$$\mathbf{f} = \mathbf{C}^T \mathbf{F}$$



离散余弦变换

► 二维DCT的定义，对函数 $f(x,y)$

$$F(u, v) = \frac{2}{N} c(u) c(v) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos \left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N} \right] \cos \left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N} \right]$$

$$f(x, y) = \frac{2}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} C(u) C(v) F(u, v) \cos \left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \right] \cos \left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N} \right]$$

其中，

$$c(u) = c(v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, u, v = 0 \\ 1, u, v = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

矩阵表达形式 $\mathbf{F} = \mathbf{CfC}$

矩阵 $\mathbf{C}$ 中 $C_{i,j}$ 可写为

$$C_{i,j} = \alpha(j) \cos \left[\frac{\pi(2i+1)j}{2N} \right], \text{ 其中 } \alpha(j) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, j = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, j \neq 0 \end{cases}$$



离散余弦变换

► 二维DCT的定义，对函数 $f(x,y)$

可见 C 是与 N 有关的矩阵：

$$\sqrt{\frac{2}{N}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{\pi}{2N} & \cos \frac{3\pi}{2N} & \cdots & \cos \frac{(2N-1)\pi}{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos \frac{(N-1)\pi}{2N} & \cos \frac{3(N-1)\pi}{2N} & \cdots & \cos \frac{(2N-1)(N-1)\pi}{2N} \end{bmatrix}$$

二维偶函数形式

$$f(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & x \geq 0, y \geq 0 \\ f(-x,y) & x < 0, y \geq 0 \\ f(x,-y) & x \geq 0, y < 0 \\ f(-x,-y) & x < 0, y < 0 \end{cases}$$



离散余弦变换 性质

- ▶ 同DFT一样，余弦变换为实的正交变换，变换核基函数正交
- ▶ 序列的余弦变换相当于DFT的对称扩展形式
- ▶ 核可分离，采用两次一维变换实现
- ▶ 余弦变换能量向低频集中
- ▶ 同DFT, DCT也有快速变换



其他变换

- ▶ 小波变换
- ▶ 沃尔什-哈达玛变换
- ▶ 哈尔变换

图像变换表达式的通用形式:

$$\text{正变换: } T(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) r(x, y, u, v)$$

$$\text{反变换: } f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u, v) s(x, y, u, v)$$



其他变换

- ▶ 小波变换
- ▶ 沃尔什-哈达玛变换
- ▶ 哈尔变换

哈达玛变换矩阵H由+1和-1组成
矩阵形式: $T=HfH$; $f=HTH$, 比DFT,DCT更简单

变换矩阵H具有递推公式

$$H_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix}$$

沃尔什-哈达玛变换核（变换矩阵）特性：

- 1) 递推性: H_{2N} 可由 H_N 递推, W_{2N} 可由 H_N 间接递推（行或列的变号次数, 自然定序排列）
- 2) 正交对称: $H_N = H_N^{-1} = H_N^T$, $W_N = W_N^{-1} = W_N^T$ 因此正反变换具有相同的变换矩阵
- 3) 核可分离: 同DFT,DCT, 属于可分离的正交变换
- 4) 变换核仅取+1和-1两个值, 变换只需加、减运算
- 5) 能量集中: 正交变换, 变换后, 幅度较大的值集中在左上角。
- 6) 能量守恒: 变换前后 $\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^2(m,n) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^2(u,v)$



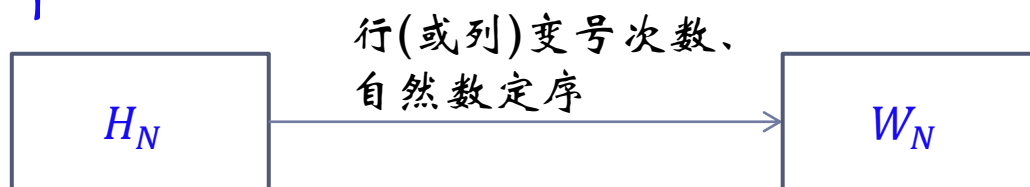
沃尔什——哈达玛变换 (Walsh-Hadamard)

$$\mathbf{H}_8 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$



► 沃尔什变换核

沃尔什变换核(变换矩阵) W_N 可由哈达玛变换核 H_N 间接得到, 如下



$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \longrightarrow W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$



沃尔什-哈达玛变换举例

▶ 参见书：P52，例3.1，例3.2

例：给定 $f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $H_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix}$, 计算
2D-DHT(二维离散哈达玛变换)和2D-DWT(二维离散沃尔什变换)

分析：由 H_2 递推计算 H_4 ，然后 $F = H_4 f H_4$

由 H_4 间接递推计(行或列变号次数，行或列自然排序)算 W_4 ，然后
 $F = W_4 f W_4$

通常应用在图像变换和图像压缩中



K-L变换(重要)

- ▶ 假如一幅图像在某个通信信道中传输了 L 次, 由于传输过程中受到噪声或干扰的影响, 接收到的图像混有随机干扰成分。称为随机图像集合, 其中各图像之间存在相关性但又不相等。
- ▶ K-L变换是针对这类随机的图像集合提出的。当对 L 个图像变换后, 得到的新图像集合中, 各图像特征之间互不相关(去相关, 正交)。
- ▶ 对变换后的图像中, 利用 K ($K < L$) 个图像恢复的图像是原图像在统计意义上(MSE, 均方误差最小准则)的最佳逼近。

Karhunen-Loeve变换, 也称Hotelling变换



K-L变换

► K-L变换的数学思想

设 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 和 $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$

为两个 n 维随机向量，其元素 x_i, y_j 分别具有 M 个随机值

假定 X 能由 Y 精确表示为：

$$X = \Phi Y$$

Φ 为 $n \times n$ 正交矩阵，记为 $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$

若取 Y 向量的前 m 个向量 Y_m 来表示 X ，记为 X_m ，可有误差

$$\Delta X_m = X - X_m$$

从统计角度，如何选择 Φ ，使得上述误差的统计均方值达到极小



K-L变换

► K-L变换的数学思想

- 通过数学分析，可得出结论如下：

对正交矩阵 $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$

- 若取 ϕ_i 为 X 的协方差矩阵 C_x 的特征向量，则对 X 进行下述变换后

$$Y = \Phi^T X \quad (1)$$

其结果 Y 向量可满足前述要求

- 上述变换式(1)与反变换

$$X = \Phi Y \quad (2)$$

称之为K-L变换，通常又称之为Hotelling变换、特征向量变换或主成分分析



K-L变换

► K-L变换矩阵的计算

■ K-L变换计算

► 对 N 维随机向量 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 其每个元素 x_i 分别具有 M 个样本

► 其平均值向量定义为:

$$\mathbf{M}_x = E\{X\} \qquad \mathbf{M}_x \cong \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{x}_i \qquad (3)$$

► 其协方差矩阵为一个 $N \times N$ 的矩阵, 定义为:

$$\mathbf{C}_x = E\{(X - \mathbf{M}_x)(X - \mathbf{M}_x)^T\} \qquad (4)$$

$$\mathbf{C}_x \cong \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_x)(\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_x)^T = \frac{1}{M} \left[\sum \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \right] - \mathbf{m}_x \mathbf{m}_x^T$$



K-L变换

► K-L变换矩阵的计算

- 令 $\mathbf{F}$ 和 λ 为 $\mathbf{C}_x$ 的特征向量和对应的特征值，可有关系

$$|\mathbf{C}_x - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad \mathbf{C}_x \mathbf{F} = \lambda \mathbf{F} \quad (5)$$

- 特征向量 $\mathbf{F}$ 为 N 维矢量，由上式可解出 N 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，将其按降序排列

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_n$$

- 将各特征值分别代入(5)式，可得出对应各特征值的特征向量为：

$$\mathbf{F}_i = [f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{in}]^T$$



K-L变换

► K-L变换矩阵的计算

► 将各特征向量转置后即可构成变换矩阵:

$$\Phi = \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \\ \vdots \\ F_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2N} \\ & \cdots & \cdots & \\ f_{N1} & \cdots & \cdots & f_{NN} \end{bmatrix} \quad (6)$$

- 在计算出特征向量矩阵后，通常进行归一化，使得变换矩阵的正交特性更加显而易见。
- 由于K-L变换采用了特征向量对应的最大特征值的思想，也被称为主分量变换。能量主要集中在特征值较大的系数中，因此如果只用前k个较大的特征值对应的特征向量，构造变换矩阵，对图像质量不会产生大的影响。
- K-L变换属于线性变换，变换核是不可分离的，通过图像的统计特性获得。



小波变换

- 傅里叶变换的引入，使人类对于自然界复杂信号或图像的分析与处理，转变为对于其相对较为简单的频域特征的分析与处理

➤ 回忆调和信号与傅里叶变换

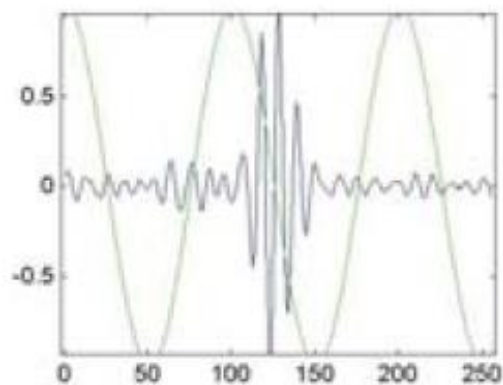
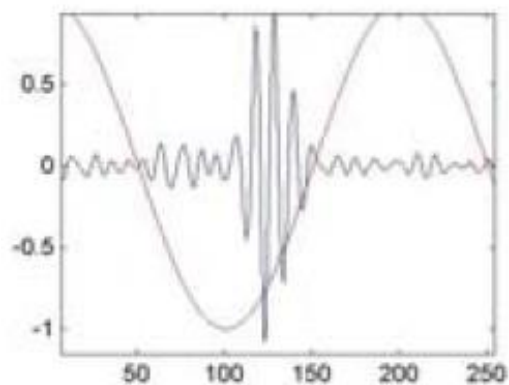
$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

$$F(\omega) = \int f(t) e^{-j\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- 实际上相当于将调和信号频率与实际信号相比较
- 若实际信号中含有对应频率，则具有较大的变换系数
- 若实际信号中没有某特定频率，则该频率对应的系数较小或为零

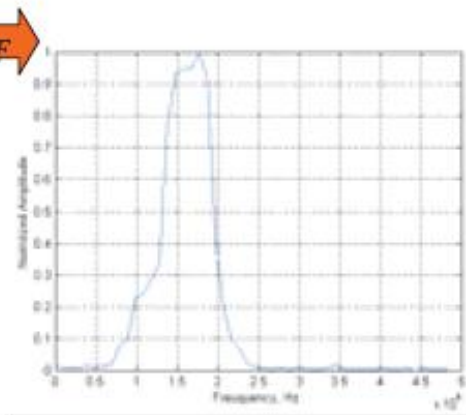
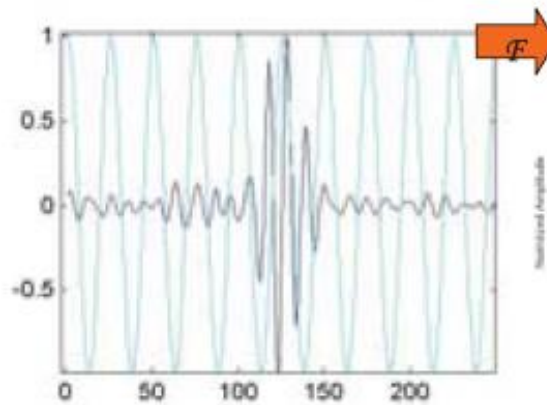
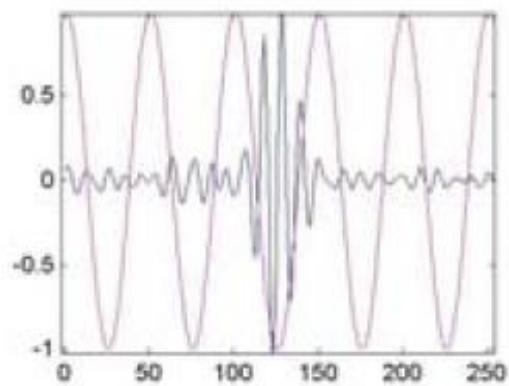


小波变换



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$



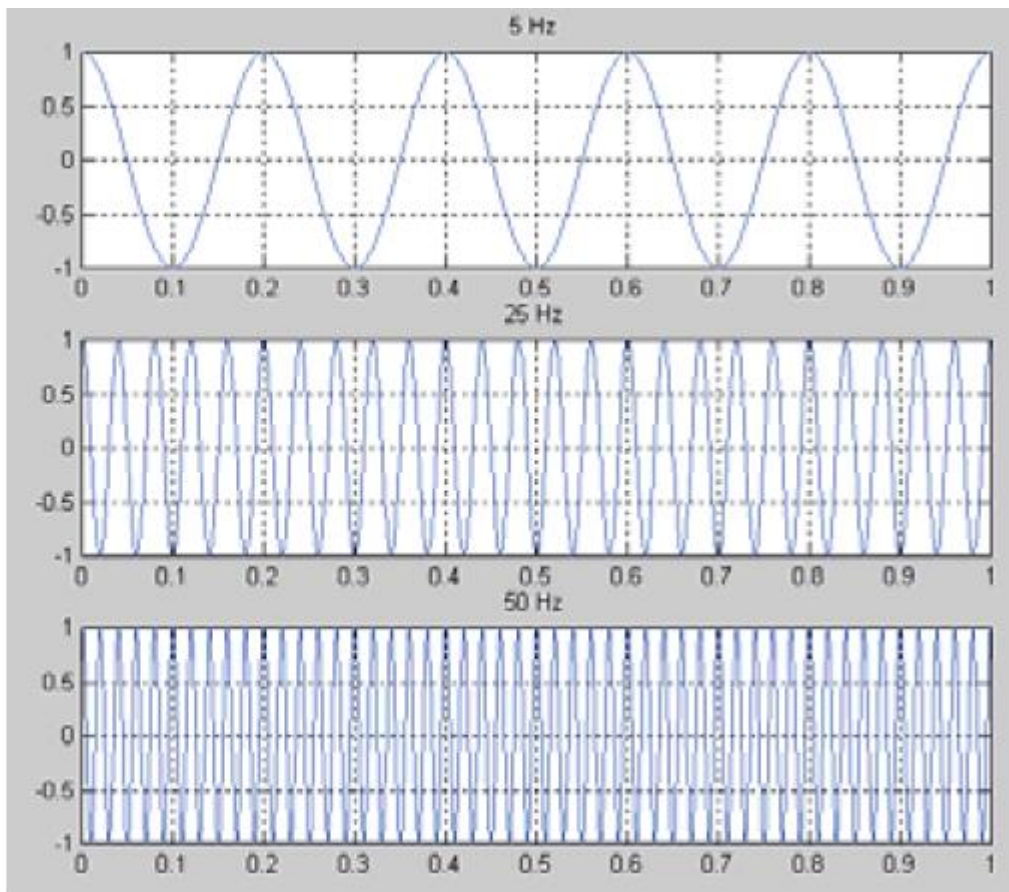


小波变换

$$x_1(t) = \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t)$$

$$x_2(t) = \cos(2\pi \cdot 25 \cdot t)$$

$$x_3(t) = \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t)$$



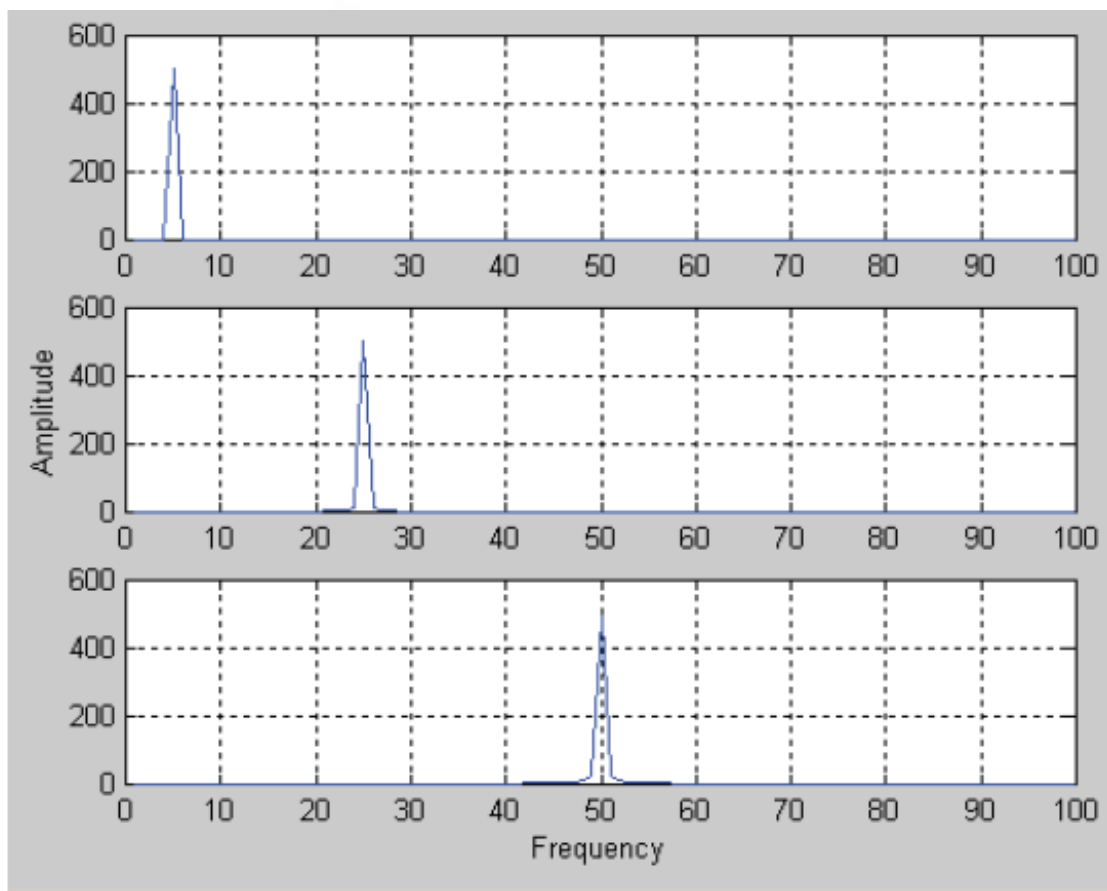


小波变换

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\omega)$$

$$x_3(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_3(\omega)$$

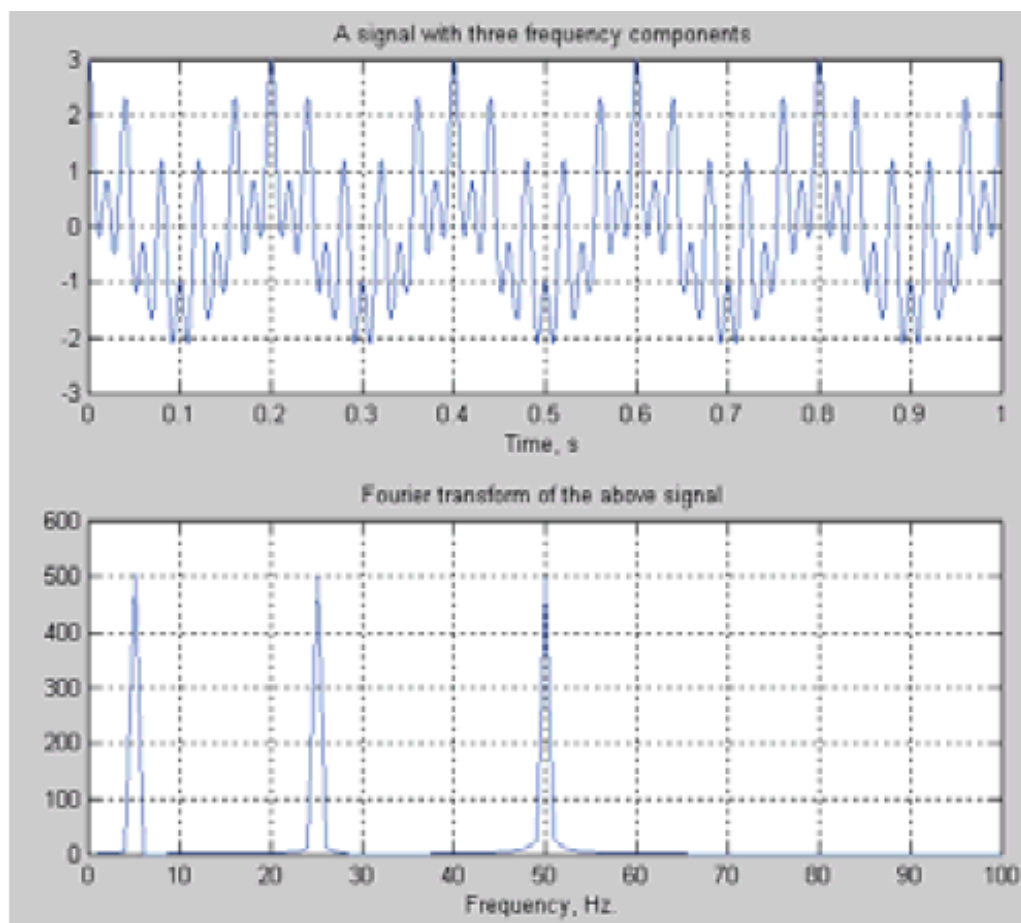




小波变换

$$\begin{aligned}x_4(t) = & \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t) \\ & + \cos(2\pi \cdot 25 \cdot t) \\ & + \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t)\end{aligned}$$

$$x_4(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_4(\omega)$$

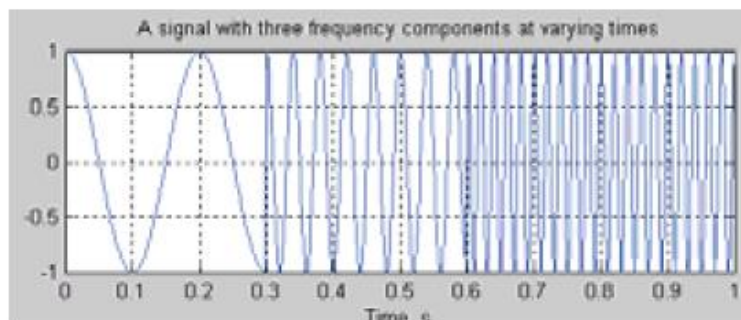




小波变换

- 傅里叶变换可以准确地知道信号中含有哪些频率成分，但不知道这些成分发生的时间、位置
- 稳态信号特征
 - 由一系列不随时间变化的频率组成
 - 不需要知道任何频率的开始与停止时间
 - 傅立叶变换基于在时间轴上无限伸展的正弦曲线波作为正交基函数，十分适于表现稳态信号
 - 非稳态信号

$$x_5(t) = [x_1 \oplus x_2 \oplus x_3]$$



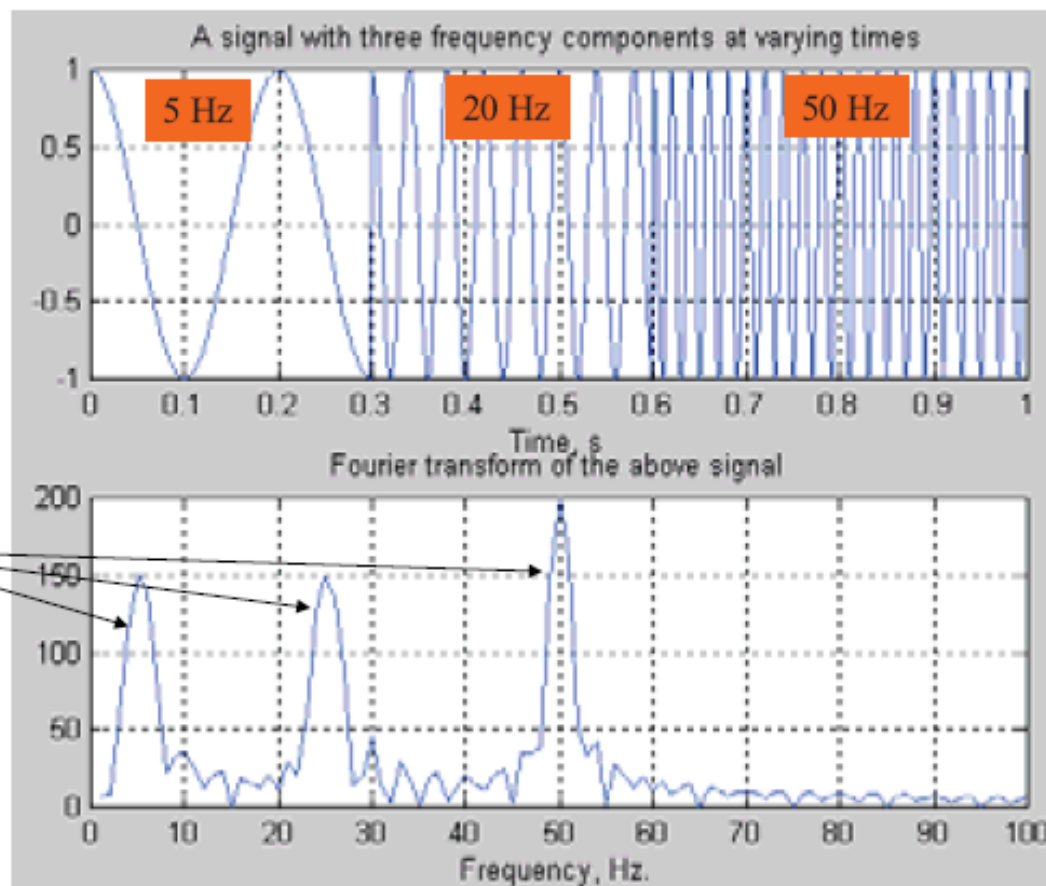
- 非稳态信号具有随时间变化的频率成分，分析中需要知道
 - 什么频率在什么时候发生
 - 特定频率发生的位置



小波变换

➤ 非稳态信号的傅里叶变换

可以准确的知道频率成分，但不知道这些频率出现的位置和延续的时间





小波变换

■ 傅里叶变换的局限性

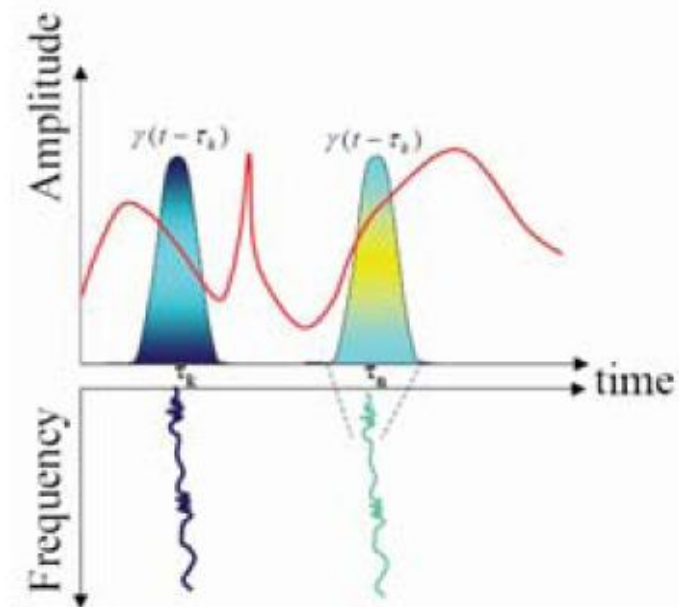
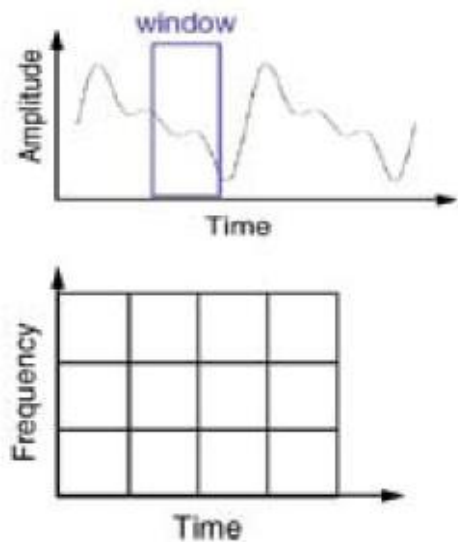
- 时间信息损失：什么时候特定的事件发生？
- 位置信息的损失：傅里叶变换不能确定某一事件的漂移、趋势、突变、起始和结束等
- 傅里叶变换分析是全局性的分析，难以分析局部信号特征
- 对于瞬态信号或高度局部化的信号（例如边缘），由于这些成分并不类似于任何一个傅立叶基函数，它们的变换系数（频谱）不是紧凑的，频谱上呈现出一幅相当混乱的构成
- 这种情况下，傅立叶变换是通过复杂的安排，以抵消一些正弦波的方式构造出在大部分区间都为零的函数而实现的
- 对于包含瞬态或局部变化成分的信号，傅里叶变换分析将难于得到最佳的表示

■ 为了克服上述缺陷，使用有限宽度基函数的变换方法



小波变换

- Gabor变换（1946），或称之为加窗付里叶变换、短时傅里叶变换（STFT）首先产生：





► STFT

■ STFT变换步骤为:

- 1) 选定一个有限窗口
- 2) 将窗口放置于信号的起点
- 3) 计算窗口内信号的傅里叶变换
- 4) 将窗口向右移动一个距离
- 5) 重复3) 4) 步, 直至达到信号的末尾

由此, 得到每个时间段内信号的频率成分

相当于人为设计了一个时间平移因子, 可以近似局部分析信号的频率位置。



■ Gabor变换具有特征:

- 实现了对于信号的频率与时间观察的折衷
- 无论时间还是频率的观察均为有限精度；整体精度取决于窗口尺寸
- 一旦窗口尺寸确定，将作用于所有频率

实际信号需要在时间与频率方面更为灵活的观察与分析



小波变换

▶ 小波变换的出现

- 进一步的发展—采用频率不同、位置不同、宽度有限的基函数进行变换：小波变换出现

➤ 基本小波

- ✓ 基本小波是一具有特殊性质的实值函数，它是震荡衰减的，而且通常衰减得很快，在数学上满足积分为零的条件：

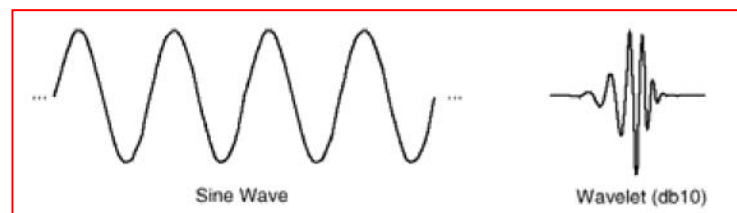
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

- ✓ 同时其频谱

$$\Psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j\omega t} dt$$

- ✓ 满足条件：

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$$



两个条件可概括为：小波应是一个具有振荡性和迅速衰减的波



小波变换

▶ 小波变换的出现

➤ 小波基函数

- ✓ 通过对基本小波进行尺度上的伸缩和位置上的移动，可形成一系列小波函数——**小波基函数**
- ✓ 一组小波基函数是通过尺度因子和位移因子由基本小波来产生：

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

式中：a - 尺度系数（伸缩系数）； b - 位移系数



小波变换

▶ 小波变换的出现

▶ 连续小波变换定义（又称之为积分小波变换）：

$$\begin{aligned} W_f(a, b) &= \langle f, \psi_{a,b}(t) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \end{aligned}$$

▶ 连续小波变换的逆变换为：

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(a, b) \psi_{a,b}(t) db \frac{da}{a^2}$$



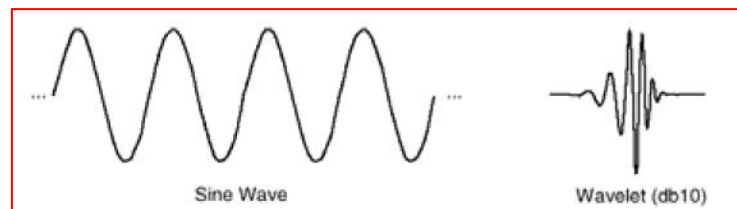
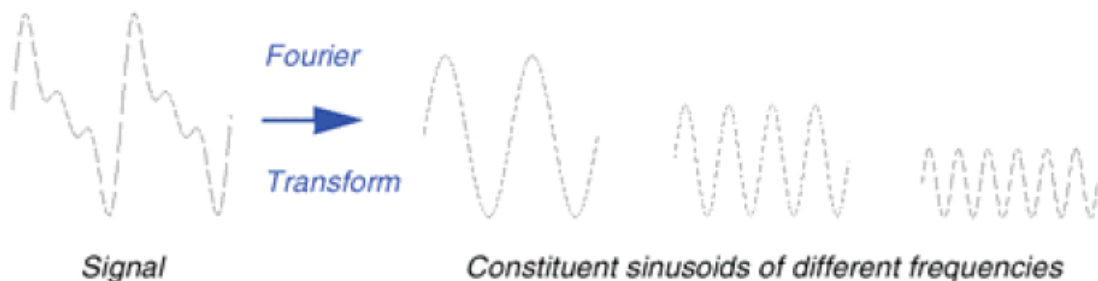
小波变换

➤ 傅里叶变换

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

✓ 意味着信号在所有时间区间与复指数相乘，结果产生傅里叶系数 $F(\omega)$

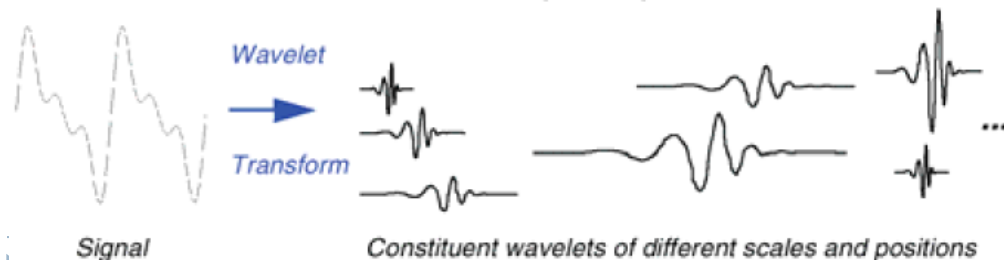
✓ 按照傅里叶系数，可将原信号分解为不同频率的组合



➤ 小波变换

✓ 结果产生小波变换系数

✓ 按照小波系数，原始信号分解为不同小波的组合



在实际应用中，Db小波有成熟的工具箱，可以方便程序调用，进行小波系数获取。



小结

- ▶ 图像变换是图像处理的一种基本方法，本部分主要介绍了图像的几何变换、一系列正交变换：离散傅里叶变换、离散余弦变换、离散沃尔什-哈达玛变换、K-L变换、小波变换。
- ▶ DFT, DCT, DHT-DWT为可分离的正交变换，K-L变换为不可分离的正交变换(主分量变换)