图像处理与识别

——Part 5 图像复原与重建

主讲：张磊

图像恢复

- 图像恢复基本概念
  - ✓ 基本概念
  - ✓ 图像退化与恢复模型
  - ✓ 图像恢复基本原理
- 噪声单独干扰下的图像复原
  - ✓ 噪声模型及参数估计
  - ✓ 空间滤波器设计
  - ✓ 自适应空间滤波器
  - ✓ 周期性干扰频域滤波器
- 无噪声干扰下的系统退化复原
  - ✓ 线性系统退化函数估计
  - ✓ 逆滤波复原方法
  - ✓ 最小均方误差滤波
  - ✓ 约束最小二乘滤波

图像恢复


(a)


(b)

图像恢复

图像恢复基本概念

- 目的：尽可能地减小或消除图像质量的下降，恢复被退化图像的本来面目。图像的降质过程，称作图像退化。
- 与图像增强的区别：目的都是改善图像质量，但出发点不同。图像恢复是基于客观准则，而图像增强是基于主观性考虑。
- 图像复原是通过图像的退化过程和因素出发，恢复图像原来的样子，因此需要一个客观的评价准则。而图像增强仅仅是改善视觉效果，适应人的需求，不考虑导致图像退化/降质的因素。

恢复原始图像 ≠ *good looking*

图像恢复

- 图像恢复基本概念
- 图像复原基本要点
  - ✓ <u>图像复原总是试图寻找引起图像质量下降的客观原因，有针对性的“复原”处理</u>
  - ✓ 获得使图像质量下降的先验知识，<u>建立退化模型</u>是图像复原的关键
  - ✓ 图像复原假定可以通过<u>估计</u>获得图像退化/降质模型

图像恢复

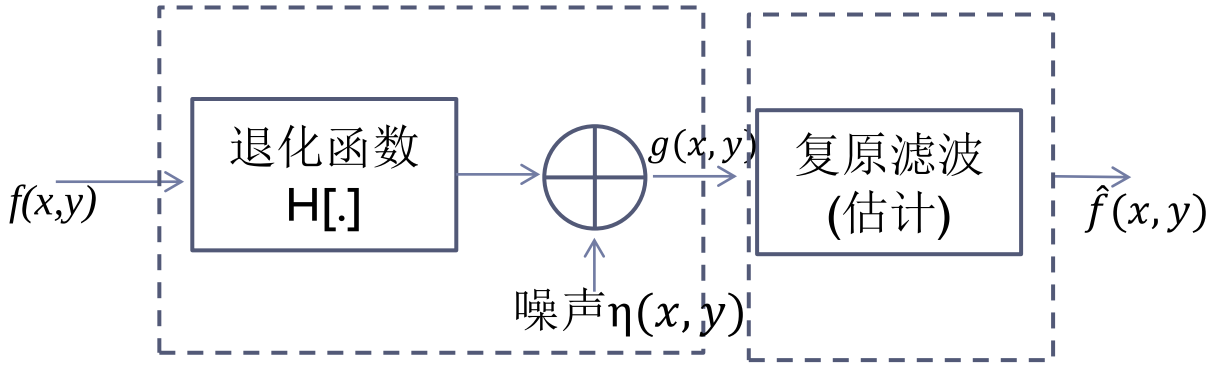
- 图像恢复基本概念
- 图像质量下降的客观因素

成像系统的畸变、有限带宽等造成图像失真

- 几何失真：由于成像器件拍摄姿态引起
- 灰度失真：光学系统和成像传感器本身特性不均匀，造成同样亮度景物的成像灰度不同
- 运动模糊：成像器件与被拍摄景物之间的相对运动引起。
- 辐射失真：由于场景传输通道中的介质特性如大气成分变换引起的图像失真
- 噪声干扰：图像在成像、数字化、采集、处理过程中引入的噪声

图像恢复

图像退化模型



- 降质图像可表示$g(x,y)=H[f(x,y)]+\eta(x,y)$
- 其中H[.]是综合所有退化因素的函数

有效地获得退化系统函数H[.]和噪声η的模型，是成功进行图像复原的关键！

图像恢复

线性移不变图像退化模型

- $g(x,y) = H[f(x,y)] + \eta(x,y)$
- 假定噪声干扰为零，对该模型，
  - 若$H[af_1(x,y) + bf_2(x,y)] = aH[f_1(x,y)] + bH[f_2(x,y)]$,则是线性系统；
  - 若$H[f(x-\alpha, y-\beta)] = g(x-\alpha, y-\beta)$,则是位移不变系统

图像恢复

- 连续函数退化模型
- 对于线性移不变系统，假定噪声为加性噪声，连续函数退化模型表达为
  - ✓ $g(x,y) = \int\int f(\alpha,\beta)h(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta + \eta(x,y) = f(x,y) * h(x,y) + \eta(x,y)$
  - ✓ 频域表示：$G(u,v) = F(u,v)H(u,v) + N(u,v)$ (频域退化)
- 对于线性移不变退化图像的复原处理即为
  - ✓ $g(x,y) = f(x,y) * h(x,y) + \eta(x,y) \Longrightarrow \hat{f}(x,y)$
  - ✓ $G(u,v) = F(u,v) \cdot H(u,v) + N(u,v) \Longrightarrow \hat{F}(u,v)$

图像恢复

离散退化模型

✓ 若对图像f(x,y)和退化函数h(x,y)均匀采样，即可得到离散退化模型。

✓ 由于线性卷积后，点数变长，为便于频域求解，需要对f和h进行延拓为大小一致。若f(m,n)为A×B，h(m,n)为C×D,则需先将f和h添加零，延拓成M×N，其中M=A+C-1，N=B+D-1。

有：$$f_e(m,n)=\begin{cases} f(m,n), 0\le m\le A-1 \text{且} 0\le n\le B-1 \\ 0, A\le m\le M-1 \text{或} B\le n\le N-1 \end{cases}$$

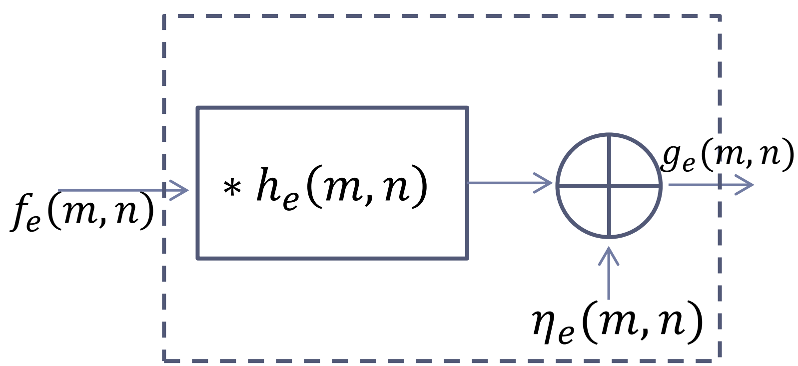
$$h_e(m,n)=\begin{cases} h(m,n), 0\le m\le C-1 \text{且} 0\le n\le D-1 \\ 0, C\le m\le M-1 \text{或} D\le n\le N-1 \end{cases}$$

图像恢复

离散退化模型

线性移不变系统的离散退化模型为

$$g_e(m,n)=\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1}f_e(i,j)h_e(m-i,n-j)+\eta_e(m,n)$$



图像恢复

图像复原基本原理与要点

- 通过退化原因，建立数学模型，沿着图像降质的逆过程恢复图像本来面貌
- 复原过程相当于设计一个滤波器，使其能从降质图像中$g(x,y)$计算出真实图像的估计$\hat{f}(x,y)$，通过某个误差准则，最大程度的接近真实图像$f(x,y)$
- 广义上，图像复原是一个“求逆”问题，通常存在非唯一解，或无解。因此，为了得到逆问题的有用解，需要根据先验知识和约束条件，对解空间进行限制。

图像恢复

- 图像复原基本原理与要点
- ✓ 图像退化原因通常是非线性的，但采用非线性的退化处理技术，非常困难
- ✓ 利用线性系统近似求解，比较方便，且效果不错。
- ✓ 从线性系统的角度，图像的退化可看成是原图像与退化函数的卷积，因此，图像复原往往称为“图像去卷积”，设计的滤波器称为“去卷积滤波器”

图像恢复

噪声模型

数字图像中，噪声主要来源于图像的获取和传输过程。比如图像的获取过程中的环境条件(光照)和成像传感器件的质量，图像传输过程中信道的干扰。

- **白噪声**
  - ✓ 傅里叶频谱为常数
  - ✓ 与空间坐标系相互独立(不相关)
  - ✓ 与图像本身相互独立，即与图像像素之间不相关
- **脉冲噪声(椒盐)**：在图像中引起黑、白点状的随机噪声，类似于胡椒和盐粉微粒。脉冲有正负之分，正脉冲产生白点，负脉冲产生黑点。
- **周期性噪声**
  - ✓ 噪声分布与空间坐标系相关
  - ✓ 大多数周期性噪声可通过频域滤波明显消除

图像恢复

噪声模型

高斯噪声(Gaussian noise)

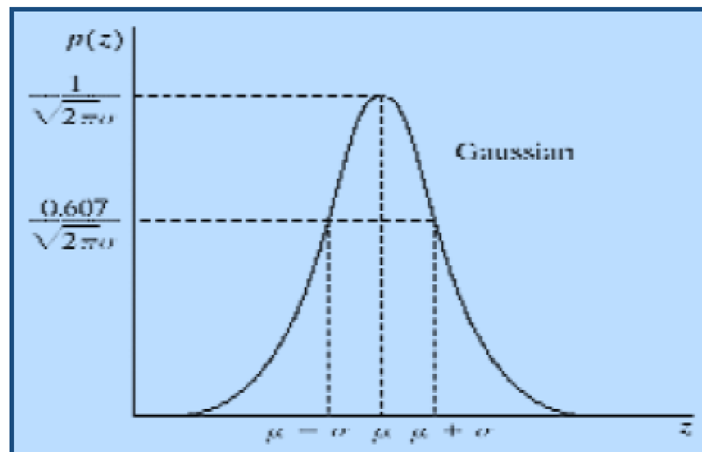
在空间域和频率域中，由于高斯噪声在数学上的易处理性，在实践中常常采用高斯噪声模型。

高斯变量z的概率密度函数(PDF),表示如下

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mu = \mu$$

$$\sigma^2 = \sigma^2$$



其中，z表示灰度值，μ和σ表示均值和标准差

图像恢复

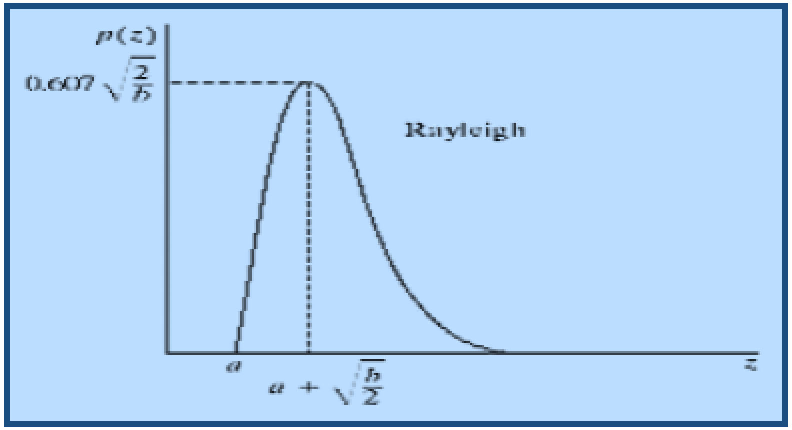
噪声模型

瑞利噪声(Rayleigh noise)

$$p(z)=\begin{cases}\dfrac{a}{b}(z-a)e^{\frac{-(z-a)^2}{b}} & z\geq a\\ 0 & z<a\end{cases}$$

$$\mu=a+\sqrt{\frac{\pi b}{4}}$$

$$\sigma^2=\frac{b(4-\pi)}{4}$$



图像恢复

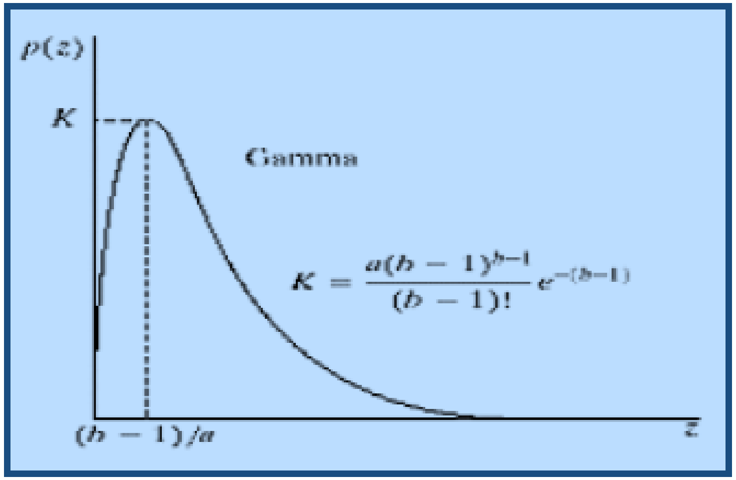
噪声模型

- 爱尔兰(伽马)噪声(Gamma noise)

$$p(z)=\begin{cases}\dfrac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!}e^{-az} & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

$$\mu=\frac{b}{a}$$

$$\sigma^2=\frac{b}{a^2}$$



图像恢复

噪声模型

指数分布噪声(Exponential noise)

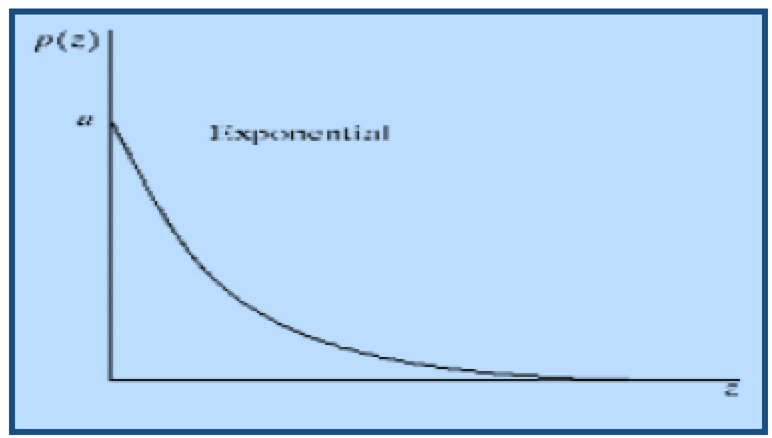
- ✓爱尔兰（伽马）噪声（**Erlang(Gamma) noise**）
- ✓指数分布噪声（**Exponential noise**）

b=1

$$p(z)=\begin{cases} ae^{-az} & z\geq 0 \\ 0 & z<0 \end{cases}$$

$$\mu=\frac{1}{a}$$

$$\sigma^2=\frac{1}{a^2}$$



图像恢复

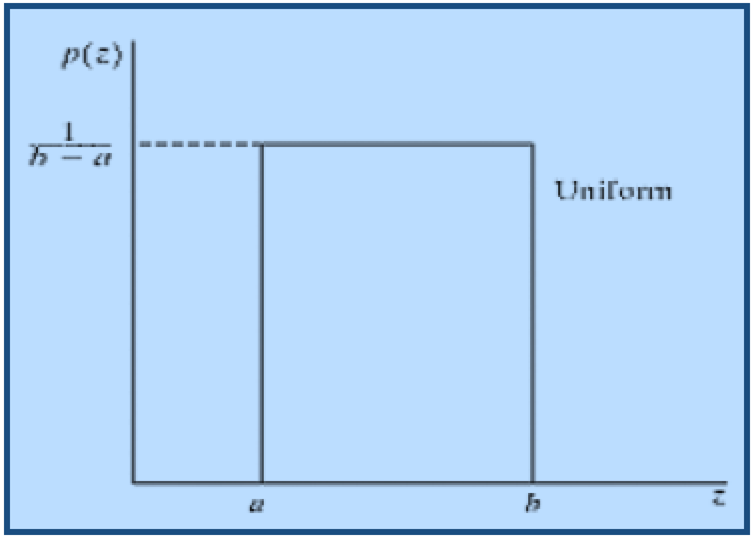
噪声模型

- 均匀分布噪声(Uniform noise)

$$p(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le z\le b\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\mu=\frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

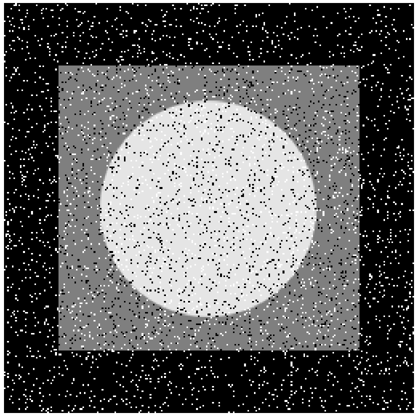


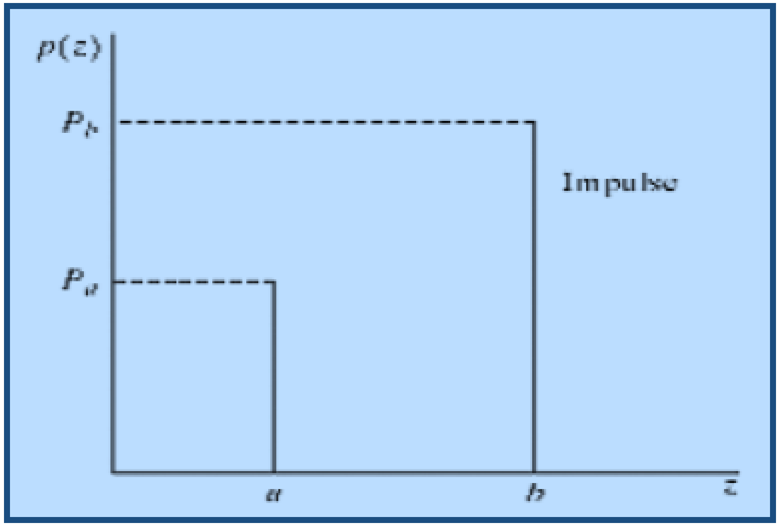
图像恢复

噪声模型

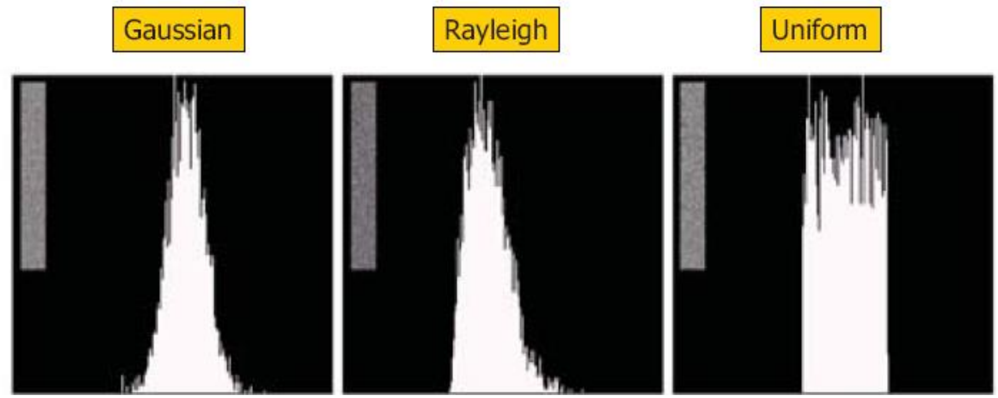
- 脉冲(椒盐)噪声 (Impulse (salt-pepper) noise)

$$p(z)=\begin{cases}P_a & z=a\\ P_b & z=b\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$





图像恢复



- 噪声模型

□ 噪声参数估计

✓ 关键：求均值和方差

$$\mu = \sum_{z_i \in S} z_i p(z_i) \qquad \sigma^2 = \sum_{z_i \in S} (z_i - \mu)^2 p(z_i)$$

其中，$p(z_i)$为灰度z_i出现的概率。

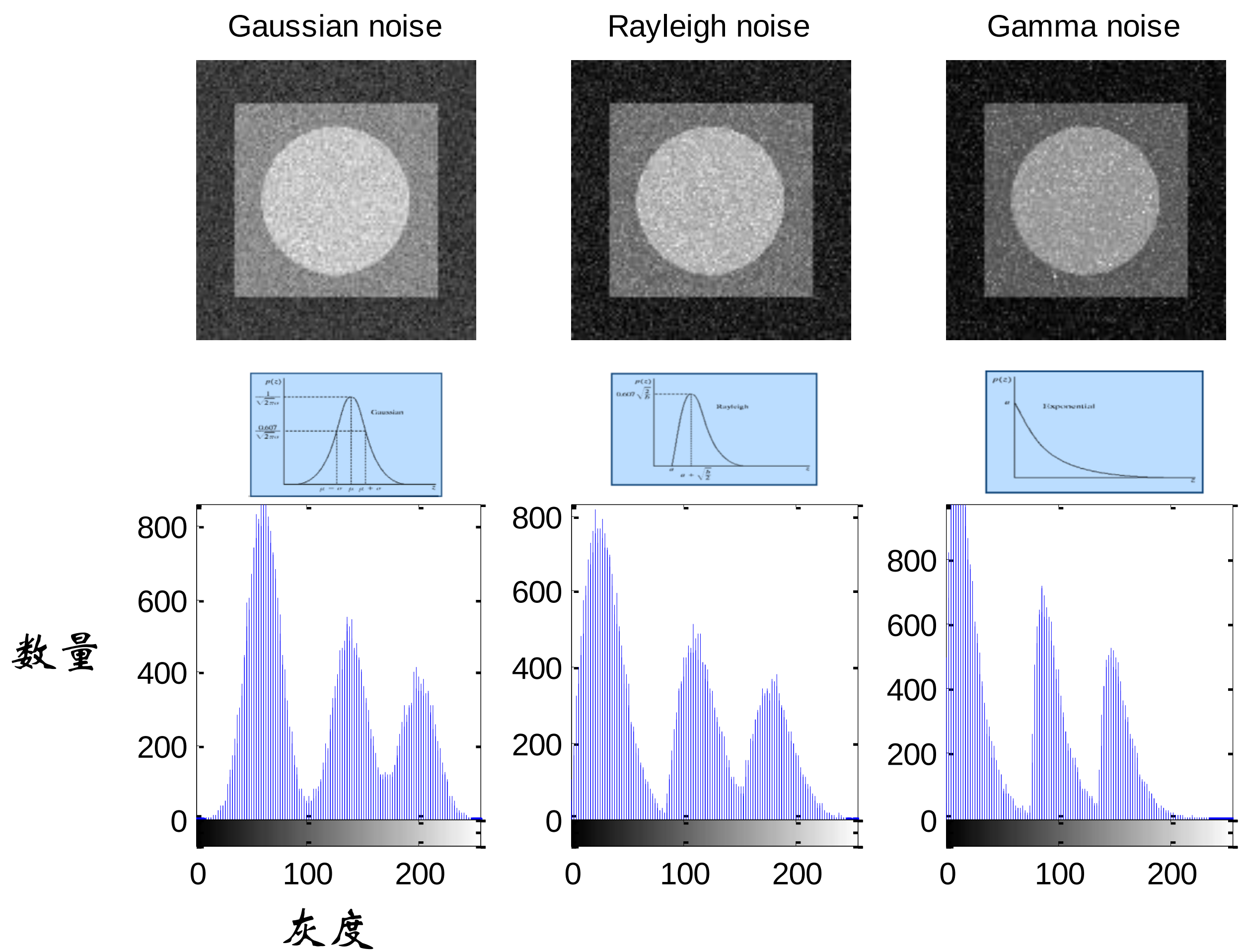
计算出均值和方差后，根据噪声的分布形状，可以确定噪声模型。

✓ 从图像本身进行估计

在图像中截取具有恒定灰度值区域，计算直方图，获得μ和σ

图像恢复

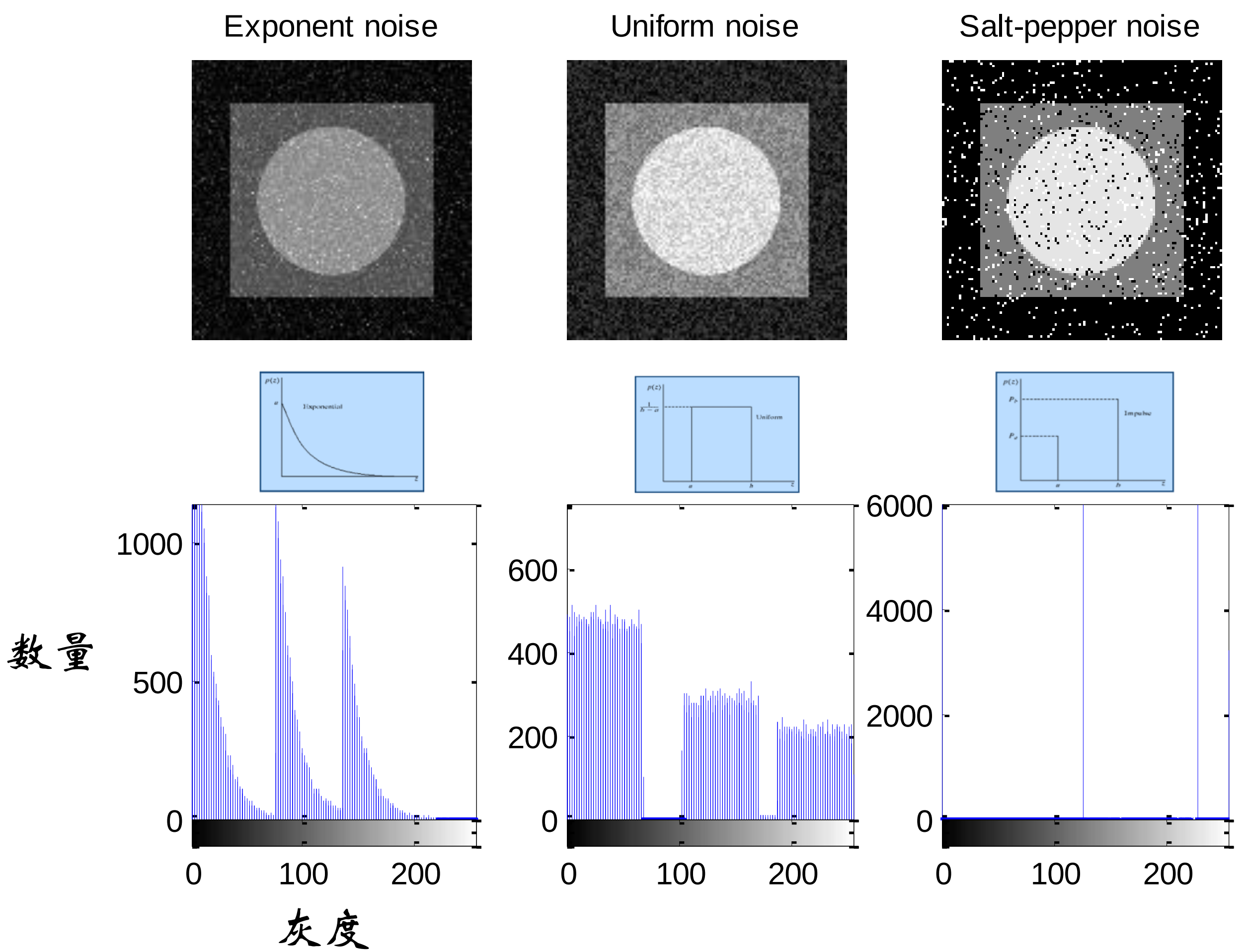
噪声模型



Gaussian noise
Rayleigh noise
Gamma noise
数量
灰度
0
200
400
600
800
100

图像恢复

噪声模型



Exponent noise
Uniform noise
Salt-pepper noise
1000
500
0
600
400
200
0
6000
4000
2000
0
数量
0
100
200
0
100
200
0
100
200
灰度

图像恢复

噪声单独干扰下的图像复原(滤波)

引起图像降质的原因仅仅是噪声干扰时，退化模型变为

$$g(x,y)=h(x,y)*f(x,y)+\eta(x,y) \Rightarrow g(x,y)=f(x,y)+\eta(x,y)$$

$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)+N(u,v) \Rightarrow G(u,v)=F(u,v)+N(u,v)$$

分析：

- ✓ 噪声函数η(x, y)一般很难得到
- ✓ 仅当噪声为周期性噪声时，可通过分析G(u, v)得到N(u, v)，但难于建立分析规律
- ✓ 其他加性噪声存在时，通常选择空间滤波技术，与图像增强中滤波机理完全一样
- ✓ 结合噪声模型可建立一些特殊滤波器，其效果可优于在图像增强中常用方法

图像恢复

噪声单独干扰下的图像复原(滤波)

空间滤波技术

注：S_{xy}是以(x,y)为中心的$m\times n$的矩形子图像窗口

均值滤波器

✓ 算术均值滤波

$$\hat{f}(x,y)=\frac{1}{mn}\sum_{(x,y)\in S_{xy}}g(s,t)$$

✓ 几何均值滤波

$$\hat{f}(x,y)=\left[\prod_{(x,y)\in S_{xy}}g(s,t)\right]^{\frac{1}{mn}}\longrightarrow$$

- ✓ 平滑度与算术滤波器相当
- ✓ 图像细节丢失更少

✓ 谐波均值滤波

$$\hat{f}(x,y)=\frac{mn}{\sum_{(x,y)\in S_{xy}}\frac{1}{g(s,t)}}\longrightarrow$$

- ✓ 对“盐”噪声较好
- ✓ 不适用于“胡椒”噪声
- ✓ 善于处理高斯噪声

✓ 逆谐波均值滤波

$$\hat{f}(x,y)=\frac{\sum_{(x,y)\in S_{xy}}g(s,t)^{Q+1}}{\sum_{(x,y)\in S_{xy}}g(s,t)^{Q}}\longrightarrow$$

Q<0 for salt

Q>0 for pepper

$Q=0$ → 算术均值

$Q=-1$ → 谐波均值

式中Q称为滤波器的阶数

图像恢复

噪声单独干扰下的图像复原(滤波)

空间滤波技术

统计排序滤波器

- 中值滤波 → $\hat{f}(x,y)=\underset{(x,y)\in S_{xy}}{\text{media}}\{g(s,t)\}$ →
  - 适用于多种噪声
  - 由其对脉冲噪声效果显著
- 最大值滤波 → $\hat{f}(x,y)=\max\limits_{(x,y)\in S_{xy}}\{g(s,t)\}$ →
  - 对胡椒噪声效果较好
- 最小值滤波 → $\hat{f}(x,y)=\min\limits_{(x,y)\in S_{xy}}\{g(s,t)\}$ →
  - 对盐噪声效果较好
- 中点滤波 → $\hat{f}(x,y)=\frac{1}{2}\left\{\max\limits_{(x,y)\in S_{xy}}\{g(s,t)\}+\min\limits_{(x,y)\in S_{xy}}\{g(s,t)\}\right\}$ →
  - 对高斯和均匀分布噪声具有最好效果
- 修正阿尔法均值滤波 → $\hat{f}(x,y)=\frac{1}{mn-d}\sum\limits_{(x,y)\in S_{xy}}g_r(s,t)$
  - $d=0$ → 算术均值
  - $d=\frac{mn-1}{2}$ → 中值

图像恢复

- 噪声单独干扰下的图像复原(滤波)
- 自适应滤波技术
- 自适应局部降噪
  - ✓以局部区域随机变量的统计特性（均值、方差）为基础

设 $$g(x,y)=f(x,y)+\eta(x,y)$$

具有整体噪声方差 σ_η^2

在局部区域S_{xy}（为g (x, y) 的子集），像素点具有局部均值m_l和方差 σ_l^2；

✓可有自适应滤波器:

待估计

$$\hat{f}(x,y)=g(x,y)-\frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_l^2}[g(x,y)-m_l]$$

✓如果噪声方差为零，则表明没有噪声；f(x,y)等于g(x,y)

✓如果局部方差高于噪声方差，表明该局部图像信息多于噪声，可能存在较多的边沿，应尽可能保留；则返回一个g(x,y)的近似值

✓如果局部方差与噪声方差相等，表明该区域噪声干扰严重；返回局部区域像素的算术平均值

图像恢复

噪声单独干扰下的图像复原(滤波)

自适应滤波技术

自适应中值滤波

设：

$z_{min}=S_{xy}$ 中灰度级的最小值

$z_{max}=S_{xy}$ 中灰度级的最大值

$z_{med}=S_{xy}$ 中灰度级的中值

$z_{xy}=$ 在S_{xy}中中心化坐标(x, y)处的像素值

$S_{max}=S_{xy}$ 允许的最大尺寸

→

A层： $A1=z_{med}-z_{min}$　　$A2=z_{med}-z_{max}$

如果： $A1>0$且$A2<0$，转到 B层

否则：增大窗口尺寸

如果窗口尺寸 $\le S_{max}$，重复 A层

否则输出 B层

B层： $B1=z_{xy}-z_{min}$　　$B2=z_{xy}-z_{max}$

如果： $B1>0$且$B2<0$，输出 z_{xy}

否则：输出 z_{med}

- ✓ 目标：滤出椒盐噪声（冲激噪声）；平滑其他非冲激噪声；减少物体边界失真
- ✓ 设想：z_{max}、z_{min}可粗略认为相当于冲激噪声的噪声成分
- ✓ 算法思路：

1) 首先检测中值z_{med}是否为噪声脉冲

2) 若不是，进一步判断中心像素z_{xy}是否为噪声脉冲，若不是，直接输出该点；若是，输出中值

3) 若中值z_{med}为噪声脉冲，则增大窗口尺寸，直至在允许的范围内找到非噪声脉冲中值；否则输出中心像素z_{xy}值

图像恢复

无噪声干扰下的系统退化复原

- 假定退化图像中噪声干扰为零，退化模型变为

$$g(x,y)=h(x,y)*f(x,y)+\eta(x,y) \Rightarrow g(x,y)=h(x,y)*f(x,y)$$

$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)+N(u,v) \Rightarrow G(u,v)=H(u,v)F(u,v)$$

- 退化函数**H(u,v)**的估计，是进行系统退化复原的关键一步，对**H**的估计过程常称为“系统辨识过程”
- 常用方法为：
  - ✓观察法
  - ✓实验法
  - ✓数学建模法

(a)

(b)

2024年4月1日起，IEEE论文禁用Lenna图像

致敬Lena Forsén

图像恢复

- 无噪声干扰下的系统退化复原
- 模型估计(建模估计)

从引起图像退化的基本原理进行推导，然后对原始图像进行模拟，在该过程中通过调整模型参数以获得尽可能精确的退化模型。

由Hufnagel和Stanley提出的退化模型是基于大气湍流的物理性。通用形式如下

$$H(u,v) = e^{-c\left(u^2+v^2\right)^{5/6}}$$

图像恢复

- 无噪声干扰下的系统退化复原
- 模型估计(建模估计)

滴流退化(模糊)过程如下：

原始图像
无湍流

$c = 0.0025$
剧烈湍流

$c = 0.001$
中等湍流

$c = 0.00025$
轻微湍流

图像恢复

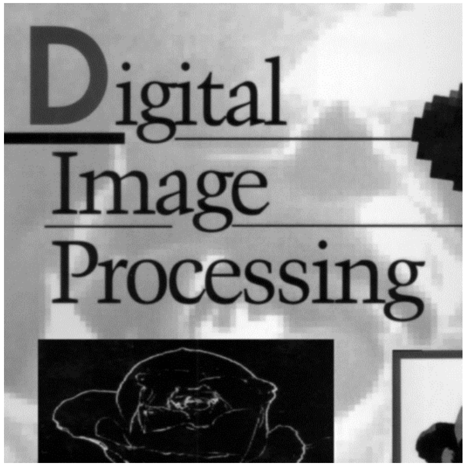
- 无噪声干扰下的系统退化复原
- 模型估计(建模估计)

运动退化(模糊)过程如下：

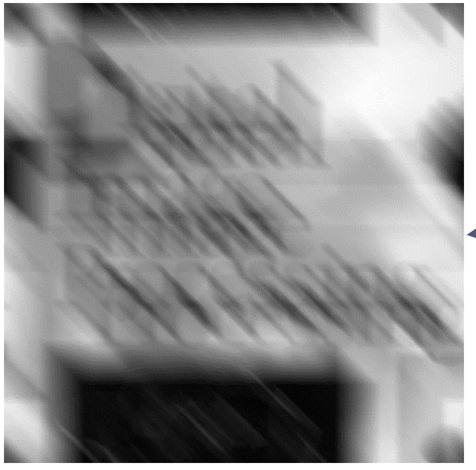
✓ 运动模糊模型—由于物体向一个方向线性移动

$$H(u,v)=\frac{T}{\pi(ua+ub)}\sin[\pi(ua+ub)]e^{-j(ua+ub)}$$

退化函数



原始图像



$a=b=0.1, T=1$

图像恢复

- 无噪声干扰下的系统退化复原
- 模型估计(建模估计)
- 运动模糊模型的推导：

假设图像f(x,y)进行平面运动，$x_0(t)$和$y_0(t)$分别是在x和y方向上随时间变化的分量，设T为曝光时间，有

$$g(x,y)=\int_0^T f[x-x_0(t),y-y_0(t)]dt$$

其中，$g(x,y)$为模糊后的退化图像。

其傅里叶变换

$$G(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^T f[x-x_0(t),y-y_0(t)]e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy\right]dt$$

$$=F(u,v)\underline{\int_0^T e^{-j2\pi(ux_0(t),+vy_0(t))}dt}=F(u,v)H(u,v)$$

图像恢复

逆滤波

- 逆滤波是最原始的图像复原方法。当退化函数$h(x,y)$或$H(u,v)$已知，根据退化模型，复原过程如下

$$F(u,v)=\frac{G(u,v)}{H(u,v)}\rightarrow f(x,y)$$

- 逆滤波的病态问题

当$H(u,v)$为零或非常小(高频率时，通常在原点处$|H(u,v)|$值最大)，$F(u,v)$变成无穷大的数，进一步考虑噪声影响

$$F(u,v)=\frac{G(u,v)}{H(u,v)}=F(u,v)+\frac{N(u,v)}{H(u,v)}$$

当$H(u,v)$为零或非常小，噪声起控制作用(对噪声极敏感)。

一般直接逆滤波的性能较差。

在信噪比极高的情况下，效果较好

图像恢复

伪逆滤波(改进)

为防止$H(u,v)$出现零或很小，对$|H(u,v)|$规定一个门限值，

$$\frac{1}{H(u,v)}=\begin{cases}\dfrac{1}{H(u,v)}, & |H(u,v)|>\delta \\ k, & |H(u,v)|\le\delta\end{cases}$$

相当于对问题的解作了一定的约束。半径δ通常要取很小值，才能保证恢复图像不受噪声影响。

图像恢复

最小均方误差滤波(维纳滤波)

该方法是针对退化函数和噪声统计特性进行复原处理的方法。

- 假设图像和噪声是随机变量，且相互独立。
- 目标是从退化图像g中找到干净图像f的最佳估计，即均方误差最小。

$$\min_{\hat{f}} e^2 = E\left\{\left|f - \hat{f}\right|^2\right\}$$

干净图像功率谱
$S_f(u,v) = E\{\|F(u,v)\|^2\}$

噪声功率谱
$S_n(u,v) = E\{\|N(u,v)\|^2\}$

- 在频域中，设滤波器函数为$\widehat{H}(u,v)$,有

$$\min_{\widehat{H}(u,v)} e^2 = E\left\{\left|F(u,v) - \widehat{H}(u,v)G(u,v)\right|^2\right\}$$

$$= E\{\|F(u,v)\|^2\} + \left\|\widehat{H}(u,v)\right\|^2 E\{\|G(u,v)\|^2\} - \widehat{H}(u,v) \cdot E\{F^*(u,v)G(u,v)\} - \widehat{H^*}(u,v) \cdot E\{F(u,v)G^*(u,v)\}$$

$$= S_f(u,v) + \left\|\widehat{H}(u,v)\right\|^2 \left(\|H(u,v)\|^2 S_f(u,v) + S_n(u,v)\right) - \widehat{H}(u,v)H(u,v)S_f(u,v) - \widehat{H^*}(u,v)H^*(u,v)S_f(u,v)$$

$G(u,v) = F(u,v)H(u,v)$

$H(u,v)$：退化函数；$\widehat{H}(u,v)$：滤波器函数

图像恢复

最小均方误差滤波(维纳滤波)

为求上式最小值，对$\widehat{H}(u,v)$求导，并令其为0，

$$\widehat{H}(u,v)=\frac{H(u,v)S_f(u,v)}{\|H(u,v)\|^2S_f(u,v)+S_n(u,v)}$$

$$=\frac{H(u,v)}{\|H(u,v)\|^2+S_n(u,v)/S_f(u,v)}$$

因此，最佳估计(去模糊图像) $\hat{F}(u,v)$可表示为

$$\hat{F}(u,v)=\widehat{H}(u,v)G(u,v)$$

$$=\frac{H(u,v)}{\|H(u,v)\|^2+S_n(u,v)/S_f(u,v)}G(u,v)$$

$$=\frac{|H(u,v)|^2}{\|H(u,v)\|^2+S_n(u,v)/S_f(u,v)}\cdot\frac{G(u,v)}{H(u,v)}$$

当这些量未知时，一般令常数$K=S_n(u,v)/S_f(u,v)$
通过调节K值，达到最佳结果。当K=0时，逆滤波。

图像恢复

- 最小均方误差滤波(维纳滤波)
  - 维纳滤波为均方误差最小意义下的最佳滤波，可使具有噪声干扰图像的客观复原性达到最佳
  - 维纳滤波假设图像与噪声均为平稳随机过程，否则，难以获得最佳估计
  - 维纳滤波建立在最小化统计准则基础上，仅在平均意义上最优(特点，并非缺点)
  - 维纳滤波需要大量先验知识，比如噪声和干净图像的功率谱
  - 通过调节滤波器过程中的K值，获得最佳结果
  - 当假设噪声为零时，即K=0，维纳滤波退化为逆滤波器

图像恢复

约束最小二乘方滤波

- 已知系统退化函数H的条件下，系统退化复原的逆滤波函数理论上为1/H，但存在病态解和对噪声的高度敏感
- 维纳滤波实现了噪声干扰条件下均方意义上的最佳滤波，但存在需要大量先验知识尤其是噪声功率谱和未退化图像的功率谱的困难
- 进一步考察退化模型的矩阵形式

$$g(x,y)=h(x,y)*f(x,y)+\eta(x,y) \Rightarrow \mathrm{g}=\mathrm{Hf}+\eta$$

- 应有

$$\mathrm{g}-\mathrm{Hf}=\eta$$

图像恢复

约束最小二乘方滤波

✓为了方便求解f，对上式采用泛函中范数表示

$$g - Hf = \eta \quad \Rightarrow \quad \|g - Hf\|^2 = \|\eta\|^2$$

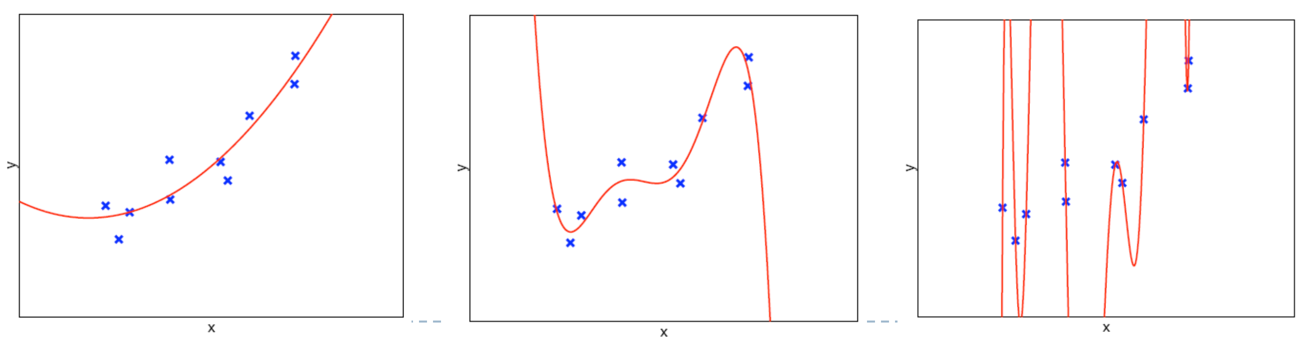
假定了噪声的高斯分布特性

✓可有

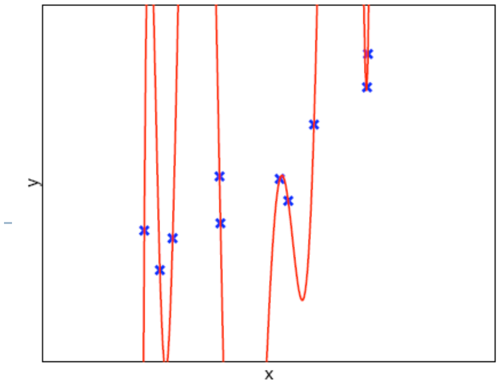
$$[g - Hf]^T [g - Hf] = e^2$$

✓由于H的问题，满足上式的解f可能很多；对此可施加一定的约束条件，以便从众多的f中选择最佳的f作为面临问题的最佳解——约束最小二乘方滤波器

如何确定约束条件？

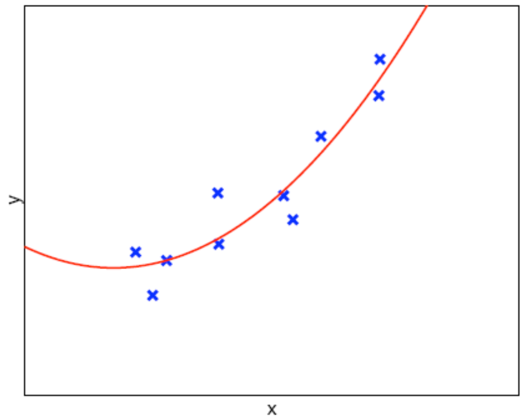


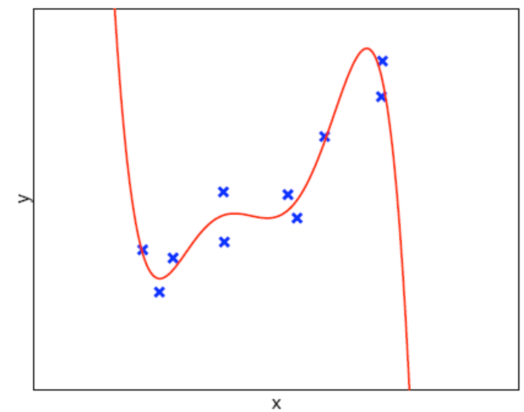
图像恢复



- 约束最小二乘方滤波

✓ 正则化





$$h_\theta(x)=\theta_0+\theta_1 x+\theta_2 x^2$$

$$h_\theta(x)=\theta_0+\theta_1 x+\theta_2 x^2+\theta_3 x^3+\theta_4 x^4+\theta_5 x^5$$

$$\min_\theta \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(h_\theta(x_i)-t_i\right)^2$$

$$\min_\theta \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(h_\theta(x_i)-t_i\right)^2+10000\cdot\theta_3^2+10000\cdot\theta_4^2+10000\cdot\theta_5^2$$

$$\min_\theta \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(h_\theta(x_i)-t_i\right)^2+\lambda\cdot\sum_{j=1}^{m}\theta_j^2$$

图像恢复

约束最小二乘方滤波

✓ 正则化

定义一个稳定算子q，那么qf描述了f的平滑程度， qf越小，f越平滑 (q相当于一个高频提取器)；

1）在约束||qf||<C的条件下求解f，使||g-Hf||达到最小

2）在约束||g-Hf||<C的条件下，求f使||qf||最小

3）求解f使下式达到最小

$$E = \|g - Hf\| + \lambda \|qf\|$$

稳定算子q目的：缓解逆滤波器中因H(u,v)很小导致恢复图像会产生剧烈噪声和边缘问题。qf相当于从图像f中提取的边缘信息。

图像恢复

约束最小二乘方滤波

正则化

由退化公式，$g(x,y)=h(x,y)*f(x,y)+\eta(x,y)$

$$g=Hf+\eta$$

假设获得的最佳估计图像$\hat{f}$满足上式，则为完全复原，即有如下等式约束条件

$$g-H\hat{f}=\eta$$

$$\left\|g-H\hat{f}\right\|^2=\|\eta\|^2$$

欧几里得向量范数

$\left\|g-H\hat{f}\right\|^2=\|\eta\|^2+\varepsilon$，其中$\varepsilon$是很小的数。

图像恢复

约束最小二乘方滤波

✓ 正则化

因此，通过构造拉格朗日乘子函数，最优化模型为

$$\min_{\hat{f}} \left\| Q\hat{f} \right\|^2 + \lambda \left(\left\| g - H\hat{f} \right\|^2 - \left\| \eta \right\|^2 \right)$$

求解可通过对$\hat{f}$的一阶导数为0，得

$$\hat{f} = \left(H^T H + \frac{1}{\lambda} Q^T Q \right)^{-1} H^T g$$

若平滑算子Q取拉普拉斯模板

约束最小二乘滤波的通用解

通常，Q可取单位阵。

$$\hat{F}(u,v) = \left[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + \gamma |P(u,v)|^2} \right] G(u,v)$$

Q(拉普拉斯算子)的傅里叶变换

图像恢复

稀疏先验图像复原

先验知识：真实图像x可以由一组过完备字典D进行稀疏表示，表达系数向量α是稀疏的。(利用尽可能少的字典原子)

$$\min_{\alpha} \|\boldsymbol{\alpha}\|_1$$

$$s.t.\ \mathbf{x} = \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}$$

退化模型：观测图像(模糊图像)y是由真实图像x经过退化函数H之后的观测，可以写成：y=Hx+e。那么复原模型

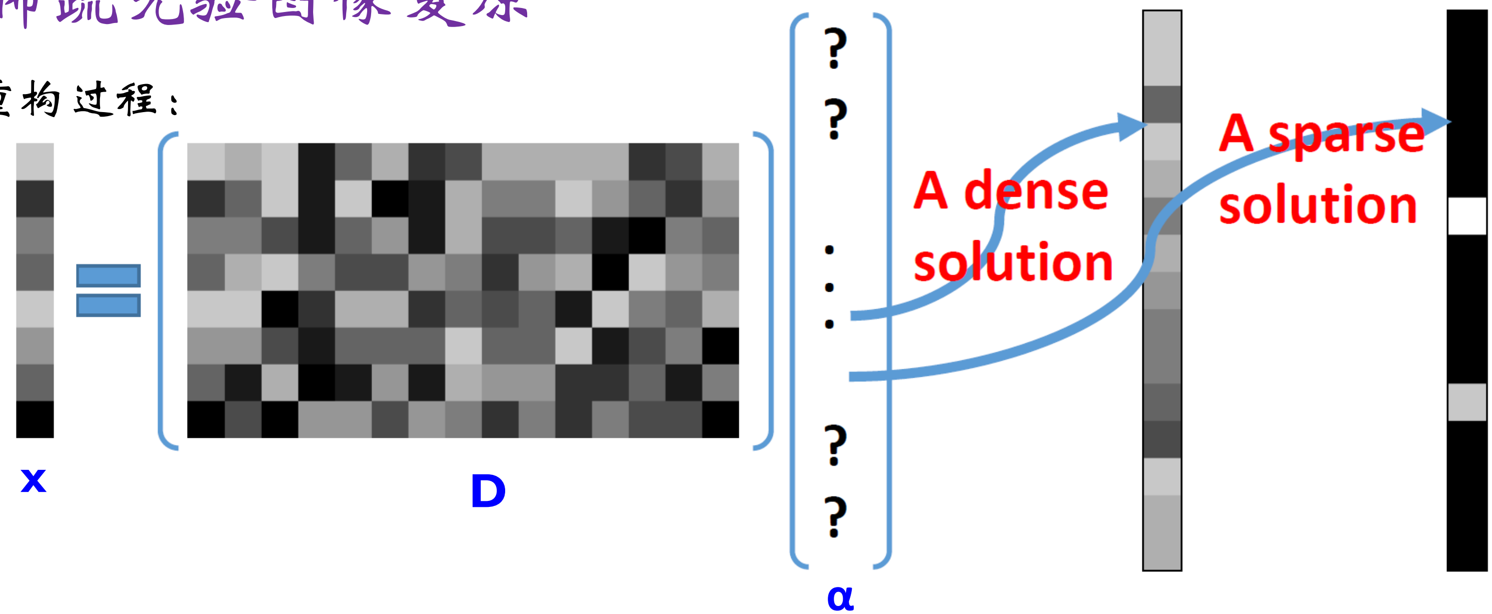
$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Hx} - \mathbf{y}\|^2 + R(\mathbf{x})$$

联合上式：$\min_{\boldsymbol{\alpha}} \|\mathbf{HD}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{y}\|^2 + \lambda\|\boldsymbol{\alpha}\|_1$　　计算x等价于计算α

图像恢复

稀疏先验图像复原

重构过程：



图像恢复

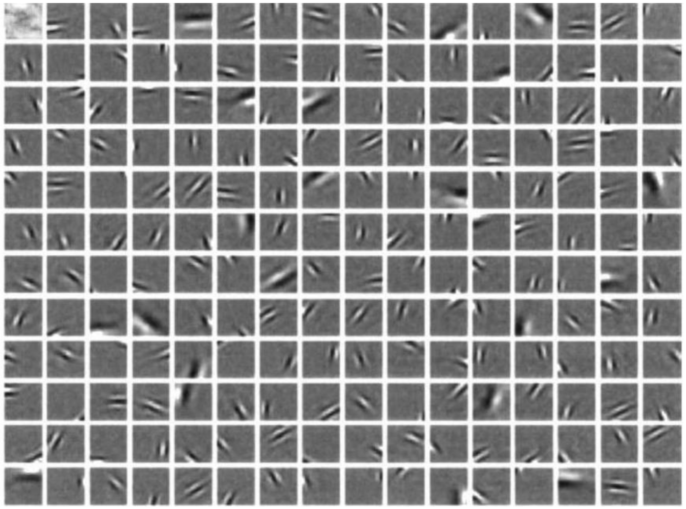
- 为什么要稀疏?

观点汇聚:

- 神经科学观点

人类视觉皮层接收信息的稀疏性。视觉神经包含大概10-12个通道，每个通道包含少量的画面信息，通过我们视觉自身的重构，使得我们看到丰富多彩的世界。

早期的LeNet神经网络的底层表现出图像信号稀疏性



图像恢复

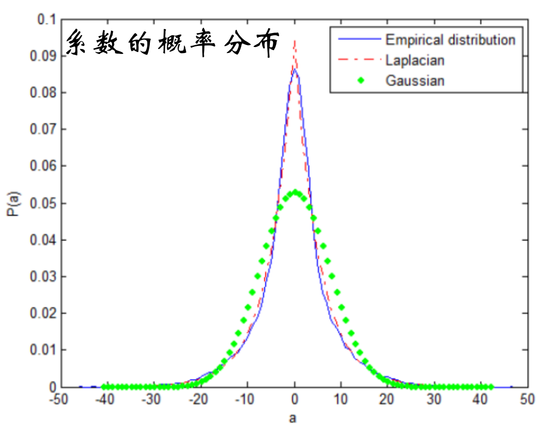
为什么要稀疏?

观点汇聚：

- 信号处理观点

信号压缩，就是稀疏编码的重要应用。压缩后的信号维度明显要低，但通过稀疏编码，可以重构回去。

- 贝叶斯观点



Likelihood　Prior

$$\hat{\boldsymbol{x}} = argmax_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \propto argmax_{\boldsymbol{x}} P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})P(\boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D\alpha}$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\alpha}} &= argmax_{\alpha} P(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{y}) \\ &= argmax_{\alpha} -log\, P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\alpha}) - logP(\boldsymbol{\alpha}) \\ &= argmin_{\alpha} \|\boldsymbol{HD\alpha} - \boldsymbol{y}\|_2^2 + \lambda\|\boldsymbol{\alpha}\|_p\end{aligned}$$

$$\alpha \sim exp\left(-\sum_i \|\alpha_i\|_p\right)$$

图像恢复

为什么要稀疏?

- 过完备字典下的稀疏 (a toy example)

x=[聪明，勤奋，有能力，不怕苦，不怕累，善良，事业心，学历高，基础好，不世俗]

紧凑的解： [0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1]

√

[0，0，0，0，0，0，0，0，0，0，0，0，0，1，0，0，0，0，0，0，0，0，0，0，0，0，0]

非常稀疏的解α

x=Dα

图像恢复

- 几何均值滤波

几何均值滤波为维纳滤波器的推广。滤波器的表达形式

$$\hat{F}(u,v) = \left[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2}\right]^{\alpha}\left[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2+\beta\left[S_\eta(u,v)/S_f(u,v)\right]}\right]^{1-\alpha} G(u,v)$$

其中，α和β为正实数。

从模型中可以看出：

- 当$\alpha=1$，退化为逆滤波器
- 当$\alpha=0$，参数化维纳滤波器；若$\beta=1$，标准维纳滤波
- 当$\beta=1$，随着α减小到0.5以下，接近维纳滤波；随着α增加到0.5以上，接近逆滤波；
- 当$\alpha=0.5,\beta=1$时，即为谱均衡滤波器。

图像恢复

约束最小二乘方滤波

- 与维纳滤波相比，约束最小二乘方滤波器假定噪声为高斯分布，只需要噪声方差和均值信息
- 噪声方差和均值可以从退化图像中获取，因此较适用
- 噪声参数的准确性是取得最佳效果的关键
- 约束最小二乘方滤波器的效果与Q和参数λ密切相关

超分辨图像复原

- 背景

在图像获取过程中，图像质量的下降来自众多因素。对于实际光学成像系统，可看作一个频率有限的滤波器，由于衍射，其传递函数在衍射的截止频率以上部分均为零。

- 问题

普通的图像复原方法只能恢复到该截止频率处，从而丢失了截止频率以外的信息。

- 方法

超分辨技术就是试图恢复截止频率以外的信息，从而获得图像的细节。具体地，超分辨技术(Super-resolution,SR)是指将低分辨率图像(LR)重构为高分辨率图像(HR)。应用十分广泛，特别是在遥感、公共安全、视频监控领域。

超分辨图像复原

- 观测模型

$$y = Hx + n$$

其中，H是观测矩阵，即退化矩阵；n是加性噪声。

上式中，y是观测图像，x是原始图像。

- 图像复原的目标

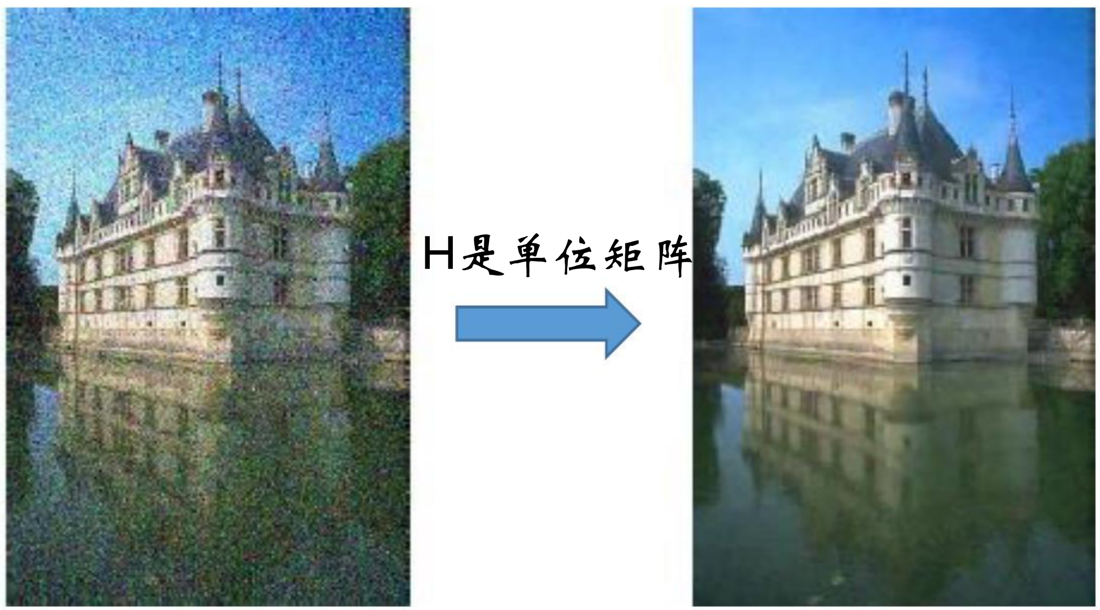
给定观测y，估计出潜在的x

- 图像复原是一个典型的病态逆问题，需要利用先验信息(正则)来约束解空间。
- 先验：稀疏先验、低秩先验、深度先验

超分辨图像复原

- 两种情况：

1)噪声单独干扰下的问题(去噪问题, denoising)

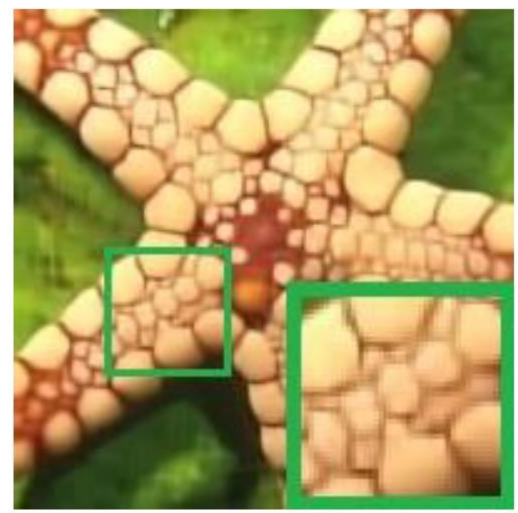


超分辨图像复原

- 两种情况：

2)无噪声干扰下的问题(去模糊问题, deblurring)

H是模糊矩阵



超分辨图像复原

超分辨问题

LR图像

H是一个混合矩阵
(模糊、下采样)

HR图像

超分辨图像复原

超分辨思想

实质是获得截止频率以外的信息。有几个方面的理论：

解析延拓理论

如果一个函数f(x)是空域有界的(在某个有限范围之外全为0)，则其谱函数F(u)是一个解析函数。其性质是若其在某一个有限区间上为已知，则处处已知。

根据给定的解析函数在某区间上的取值对整个区间进行重建，叫作解析延拓。对于一幅图像，由于空域有界，其谱函数必然解析。

也就是说，利用该理论，截止频率以上的丢失信息可以采用截止频率以下的F(u)进行重建，即超分辨复原。

超分辨图像复原

信息叠加理论

- 对于一幅图像f，其具有非负性和有界性。数学表示为

$$\begin{cases} f(x) > 0, if\ x \in X \\ f(x) = 0, otherwise' \end{cases}$$

其中，X为图像的像素区域。还可以表示为

$$f(x)rect(x/X)$$

阶跃函数

- $f(x)$的傅里叶谱可分成两部分：$F_a(u)$截止频率以下部分，$F_b(u)$截止频率以上部分，即

$$F(u) = [F_a(u) + F_b(u)]sinc(X_u)$$

辛格函数$sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

- 从上式可以看出，由于sinc是无限的，

截止频率以上的信息通过卷积叠加到了截止频率以下的部分。也就是说，对于一幅图像，截止频率以下的频率成分中包含了图像的所有信息(低频和高频)。如果能够将其分离出来，可实现图像的超分辨复原。

超分辨图像复原

超分辨复原的数学模型

- ✓ 超分辨复原与普通图像复原的不同之处在于，超分辨复原需要已知一组低分辨率(LR)图像序列，通过这些图像序列间相关却又不完全相同的信息，得到一幅高分辨率(HR)图像。
- ✓ LR图像代表同一场景的不同侧面，是基于亚像素(sub pixel)精度的平移，这样每一幅LR图像包含不同的信息，才能辅助实现HR图像的重建。若是基于HR整数像素平移，则信息相同，SR无法实现。

超分辨图像复原

超分辨复原的数学模型

✓ 假设已知N幅观测到的LR图像g_k(大小为$M_k \times M_k$), $k = 1, \dots, N$。将每幅图像按字典式排序表示为$g_k \in \Re^{M_k^2 \times 1}$序列，利用N个LR图像序列，获得一幅HR图像$f$(大小$L \times L$)，其字典式排序结果表示为$f \in \Re^{L^2 \times 1}$。假设高分辨率图像f在扭曲、模糊、下采样过程中，混入了加性白噪声η，那么每幅LR图像序列g_k的观测模型为

$$g_k = \overbrace{\boxed{D_k B_k F_k}}^{H} f + \eta_k, k = 1, \dots, N$$

其中，$F_k \in \Re^{L^2 \times L^2}$为几何运动矩阵，$B_k \in \Re^{L^2 \times L^2}$为线性移不变模糊矩阵，$D_k \in \Re^{M_k^2 \times L^2}$为下采样矩阵，$\eta_k \in \Re^{M_k^2 \times 1}$为噪声矢量

超分辨图像复原

超分辨复原的数学模型

令$D_kB_kF_k = C_k$,模型转换为

$$g_k = C_k f + \eta_k, k = 1, \dots, N$$

对于N个LR图像序列，有

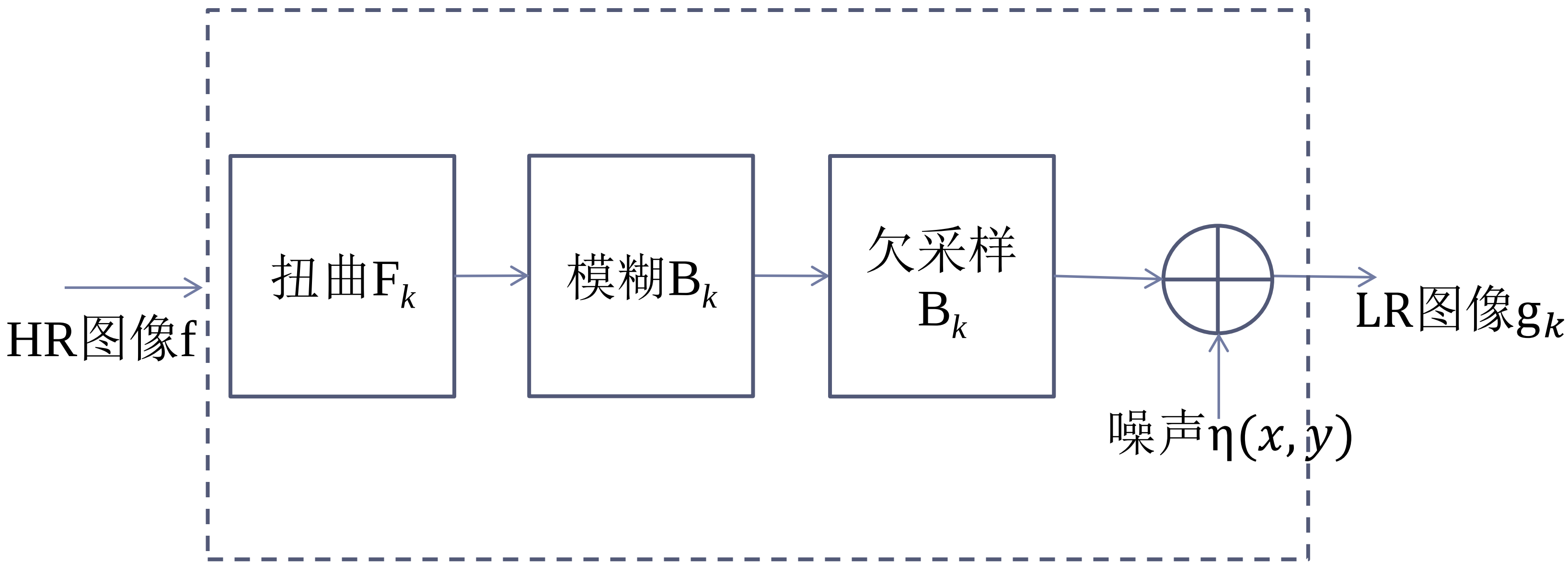
$$\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} f + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_N \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\eta}$$

超分辨图像复原

超分辨复原的观测模型框架



超分辨图像复原

超分辨图像复原算法

按作用域分为：频域法和空域法；

- ✓ 频域法

早期较受关注，优点是频域的快速处理，但由于频域不能很好体现先验知识，实际应用效果不好。

- ✓ 空域法

随着计算机快速发展，近年来较受关注。较为典型的贝叶斯分析法，稀疏表示，字典学习，深度学习。

超分辨图像复原

超分辨图像复原算法

贝叶斯分析法

图像在建模中可视作一个平稳的随机场，那么将原图像f和退化图像g均看作是随机场。根据贝叶斯理论，在已知图像g的条件下，原图像f的概率分布表达为

$$P(f/g)=\frac{P(g/f)P(f)}{P(g)}$$

其中，$P(f/g)$为给定g时获得f的后验概率，$P(f)$ 为原图像f的先验概率，$P(g)$ 为退化图像g的先验概率，$P(g/f)$为给定f时，获得g的概率(似然)。

超分辨图像复原

超分辨图像复原算法

贝叶斯分析法

目标：通过计算f，使得$P(f/g)$最大，那么此时的f为复原的最佳估计。最大化表示为

$$\max_f P(f/g) = \max_f \frac{P(g/f)P(f)}{P(g)}$$

$$\max_f P(g/f)P(f)$$

$$\underline{\max_f lnP(g/f) + lnP(f)}$$

最大后验估计
$Maximum\ a-posteriori(MAP)$

最大(极大)似然估计
$Maximum\ likelihood(ML)$

超分辨图像复原

超分辨图像复原算法

贝叶斯分析法

极大似然估计 思想：概率大的事件在一次观测中更容易发生，因此在一次观测中发生的某事件，其概率一定大。

若总体离散样本X，其概率分布函数$P(X=x)=p(x;\theta)$,其中θ为待估计的参数。设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的样本，则其联合概率分布函数

$$\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$$

所有采样的独立同分布性质

事件$\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}$发生的概率：

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$$

该函数对于θ可微，取对数，然后求导

超分辨图像复原

超分辨图像复原算法

贝叶斯分析法

极大似然估计法：求最佳估计$\hat{\theta}$使得

$$L(x_1,\cdots,x_n;\hat{\theta})=\max_{\theta\in\Theta}L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$$

此时的$\hat{\theta}$为参数θ的最大似然估计。

超分辨图像复原

超分辨图像复原算法

贝叶斯分析法

最大后验估计法(MAP)：与ML最大的不同，在于其考虑了待估计参数的先验，利用了朴素贝叶斯理论。相当于一种正则化的ML。

在ML中，待估计参数本身的概率分布是均匀的，是一个固定值。

$$\hat{\theta}_{MAP} = \max_{\hat{\theta}_{MAP}} L\left(x_1, \dots, x_n; \hat{\theta}\right) = \max_{\hat{\theta}_{MAP}} \prod_i p(x_i|\theta)p(\theta)$$

其中，$p(\theta)$是待估计参数θ的先验；

朴素贝叶斯假设了特征的条件独立性

超分辨图像复原

超分辨图像复原算法

贝叶斯分析法

- 利用MAP法解 $\hat{f}_{MAP} = \max_{f} lnP(g/f) + lnP(f)$，令其导数为0，有

$$\frac{\partial[lnP(g/f) + lnP(f)]}{\partial f}|_{\hat{f}_{MAP}} = 0$$

- 利用ML法解，

$$\left\{\frac{\partial lnP(g/f)}{\partial f}\right\}|_{\hat{f}_{ML}} = 0$$

超分辨图像复原

超分辨图像复原算法

贝叶斯分析法

需要确定$P(g/f)$和$P(f)$的表达式，即概率分布。这取决于图像的统计模型，比如高斯、拉普拉斯、泊松分布等。

假设图像统计模型服从高斯分布(i.e.高斯先验)，有

$$P(g/f) = e^{-\delta\|g-hf\|^2}$$

$$P(f) = e^{-\sigma\|f\|^2}$$

那么通过取对数后，指数消失。

对于其他分布，通过多次迭代可以获得最佳的f。

超分辨图像复原

超分辨图像复原算法

稀疏字典学习法

根据图像的自相似性，假设有N幅图$X=[x_1,\ldots,x_N]$，对于给定的任意一幅图y，该图可被N幅图中的非常少量的几张图进行近似线性表示，即有

$$y \approx X \cdot \alpha$$

根据问题，我们知道α是稀疏的(稀疏先验)。

为了获得稀疏的编码表示，上述问题可以写成

$$\min_{\alpha} \| y - X \cdot \alpha \|^2$$

$$s.t. R(\alpha) \le \epsilon$$

超分辨图像复原

超分辨图像复原算法

稀疏字典学习法

数学上，描述稀疏度的度量称为0-范数，即l_0。

上述问题可以写成

$$\min_{\alpha} \|y - X \cdot \alpha\|^2 + \gamma \|\alpha\|_0$$

通常由于0-范数的NP难问题，上述问题难以求解。研究证明，在α非常稀疏的条件下，可以用1-范数凸近似。

$$\min_{\alpha} \|y - X \cdot \alpha\|^2 + \gamma \|\alpha\|_1$$

超分辨图像复原

超分辨图像复原算法

稀疏字典学习法

在线性表示中，为了改善表示准确度，基表示很重要。

如果能够利用学习的方法，学习一组过完备的字典D，则更有利于稀疏编码，即用非常少的字典原子进行表示。

稀疏字典表达模型：

$$\min_{D,\alpha} \| y - D \cdot \alpha \|^2 + \gamma \| \alpha \|_1$$

假设y是一张高分辨率图像，那么利用上述模型进行学习，获得的字典D为高分辨率字典，定义为D_h；同理，可以获得低分辨率字典D_l。

超分辨图像复原

超分辨图像复原算法

稀疏字典学习法

获得高分辨率图像字典D_h和低分辨率图像字典D_l后，实现低分辨率图像x的超分辨图像复原，只需要两个步骤。

步骤1：编码。利用低分辨率图像字典D_l对低分辨率图像x进行编码

$$\min_{\alpha} \| x - D_l \cdot \alpha \|^2 + \gamma \|\alpha\|_1$$

步骤2：重建。利用高分辨率图像字典D_h和稀疏编码系数α对高分辨率图像$\hat{x}$进行重建

$$\hat{x} = D_h \cdot \alpha$$

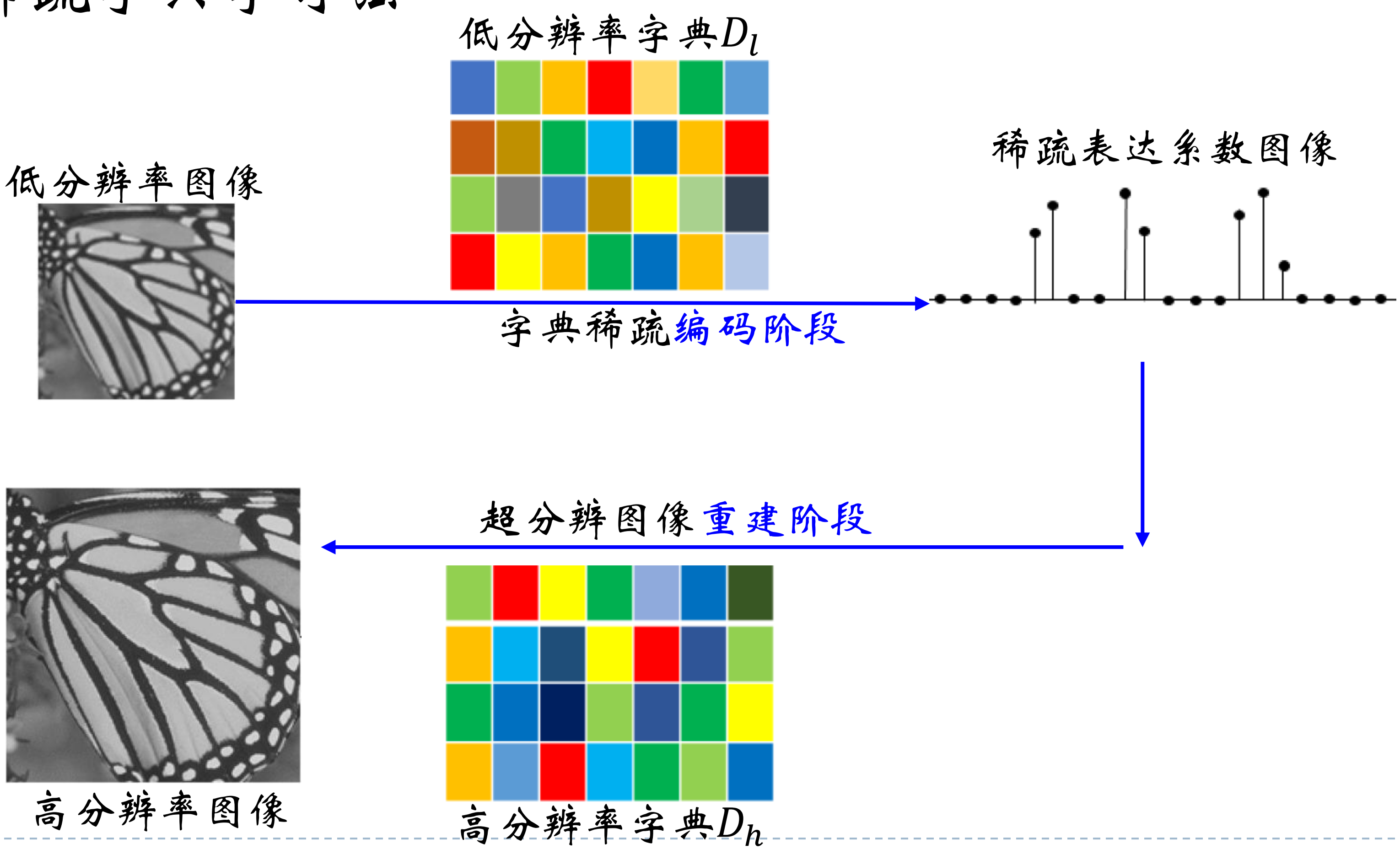
注：过完备字典的求解通常利用K-SVD算法，稀疏编码的优化可采用OMP或LASSO。

[1] Image super-resolution with sparse representation, IEEE TIP, 2010.
[2] K-SVD: an algorithm for designing over-complete dictionaries for sparse representation, IEEE TSP, 2006

超分辨图像复原

超分辨图像复原算法

稀疏字典学习法



几何畸变图像复原

几何畸变图像复原

- 问题：在图像获取过程中，由于成像系统的非线性、图像获取视角变换、目标物的表面弯曲等，造成图像的几何畸变。最为常见的一种畸变是仿射变换。

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & m \\ c & d & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 几何畸变表现在图像中像素空间关系的变化。
- 方法分成两步：空间坐标变换、灰度值确定(插值方法：近邻、双线性)。

小结

- 图像复原的基本原理
  - 图像退化与恢复模型
- 噪声干扰下的图像复原
  - 噪声模型
  - 空间滤波器
  - 自适应滤波器
  - 周期性干扰频域滤波
- 系统退化复原
  - 逆滤波
  - 维纳滤波(均方误差最小)
  - 约束最小二乘方滤波
- 超分辨辨图像复原
  - 基本思想
  - 基本理论
  - 基本方法